

Math. P.

400 g.

Die trigonometrische Punkt-
bestimmung im Netz - An-
schluss.

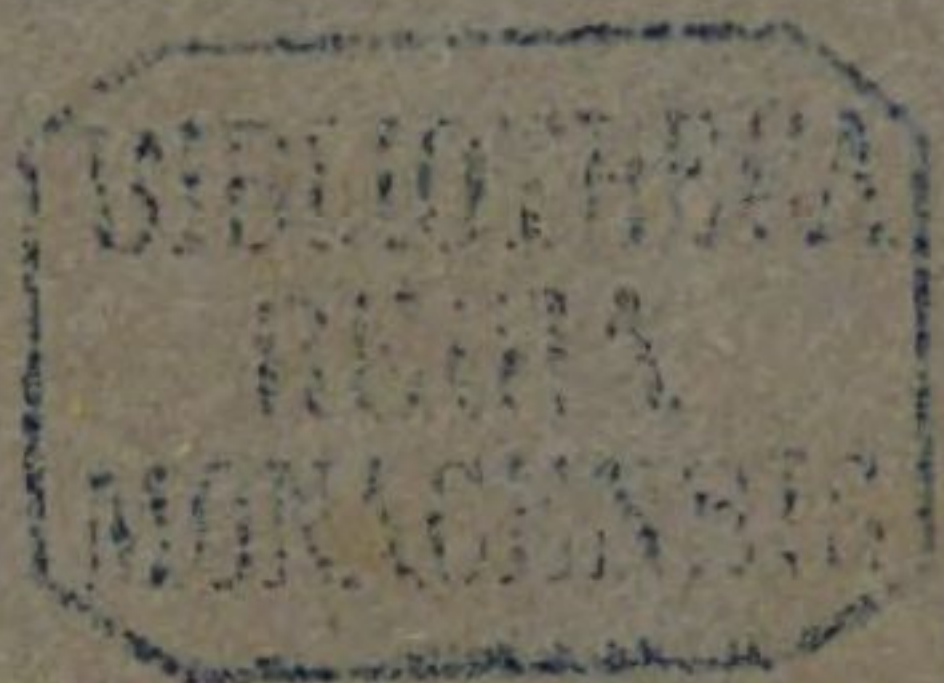
8° Math. P. 700 2

Frankie

<36600870830019

<36600870830019

Bayer. Staatsbibliothek



DIE
TRIGONOMETRISCHE PUNKTBESTIMMUNG

IM
NETZ-ANSCHLUSS.

MIT BESONDERER RÜCKSICHT
AUF EINE RATIONELLE FEHLER-AUSGLEICHUNG.

VON

DR. J. H. FRANKE,

Trigonometer u. Abtheilungs-Vorstand am kgl. bayer. Kataster-Bureau.

MÜNCHEN, 1875.

VERLAG VON JUL. GRUBERT.

g. n. 21.





VORREDE.

Die Veröffentlichung vorliegenden Schriftchens ist in der Absicht geschehen, Grundsätze und Methoden für trigonometrische Punkt-Bestimmungen zur allgemeineren Kenntniss zu bringen, welche einmal geeignet sind die Ausführung gedachter Arbeiten zu erleichtern, als auch denselben durch Basirung auf gewisse, der Theorie wie der praktischen Erfahrung entnommene feste Grundlage einen präciseren Charakter zu geben und dabei gleichzeitig den Werth ihrer Resultate zu erhöhen.

Hiermit war sowol Umfang wie Darstellungsweise des Inhalts gegeben: nämlich in möglichster Kürze und doch populärer Sprache die bezüglichlichen mathematischen Entwicklungen nur soweit zu führen, als zur Begründung und näherem Verständniss der erörterten Methoden gerade nothwendig war, rein theoretische und dabei umfangreiche Betrachtungen aber auszuschliessen. Dass zu letzteren Gelegenheit geboten war, wird der Inhalt ergeben; ich brauche nur an die Ermittlung des mittleren Fehlers unserer Richtungsbeobachtungen wie an die Wirkungen einer systematischen Netzverschiebung zu erinnern. Besonders ist die letztere Untersuchung interessant, insoferne sie in gewisser Hinsicht zu einem Analogon des physikalischen Satzes führt: „Wenn alle Punkte eines Systems eine gemeinschaftliche Bewegung haben und einer von ihnen wird der Wirkung einer Kraft unterworfen, so ist die Bewegung, welche der Punkt in Folge dieser Kraft, in Beziehung auf das System annimmt, genau so, als habe die gemeinschaftliche Bewegung des Systems nicht stattgefunden“. Diese und ähnliche Untersuchungen mussten aber mit Rücksicht auf den hier zu erreichenden Zweck

IV

unterbleiben, sollte anders die Schrift nicht einen Umfang erreichen, der den Kreis ihrer Verbreitung beschränkte.

Im ersten Artikel sind einige von mir hergestellte graphische Tafeln besprochen, welche die Auffindung der sogenannten Erdkrümmungs-Korrekturen im Sol'dner'schen Coordinatensystem in kürzester Frist ermöglichen, weit sicherer und rascher als die numerische Berechnung dies gestattet. Ich bin dabei von der gewiss nicht zu bestreitenden Voraussetzung ausgegangen, dass die Vernachlässigung dieser Korrekturen selbst in elementar-trigonometrischen Arbeiten vollständig unstatthaft ist. Diese Vernachlässigung wirkt gleich Messungsfehlern und daraus ergibt sich sofort der Satz, dass die fraglichen Korrekturen zum mindesten von der Grenze an berücksichtigt werden müssen wo diese unsere mittleren Messungsfehler erreicht. Der letztere ist beispielsweise für unsere Einschaltungen im bayerischen Dreiecksnetz auf etwa $\pm 0,05^m$ anzunehmen; denselben Betrag erreicht die Abscissen-Korrektur für die durchschnittliche Länge der Seiten unserer Bestimmungsdreiecke zu 1500^m aber bereits bei einer Ordinate zu $y_2 = 50000^m$ während die Ausdehnung unseres Netzes sowohl nach Osten und Westen über 200000^m beträgt. Da die Sekundär-Punkte sämtlich diese Korrektur enthalten, so würde, wie leicht zu sehen, eine Vernachlässigung dieser letzteren bei Einschaltung weiterer Punkte zu vielfachen Unzuträglichkeiten führen; aus diesem Grunde werden auch die fraglichen Korrekturgrößen innerhalb bestimmter Grenzen immer zu berücksichtigen sein.

Der zweite Artikel enthält gewisse allgemeine Grundsätze für die Einschaltung weiterer Punkte in ein gegebenes Dreiecksnetz. Dieselben sind hauptsächlich aus der Erfahrung geschöpft, wo sie sich aber auf theoretische Gründe stützen, habe ich vor Allen die ausgezeichneten (im Texte näher angeführten) Helmert'schen und die diesen sich anschliessenden Jordan'schen Untersuchungen als wesentlichste Grundlage zu nennen. Die auf diesen sich aufbauenden kurz formulirten Sätze, in einzelnen Theilen nur modificirt durch die nothwendige Berücksichtigung der in der Praxis obwaltenden Umstände, werden im III. Art. in einem wesentlichen Theile ergänzt durch die besondere Bestimmung von Ausgangs-

punkten für eine auszuführende Lokal-Einschaltung oder Triangulation.

Der soeben genannte III. Abschnitt enthält Ausführungen über eine rationelle Ausgleichung der systematischen und Beobachtungs-Fehler unter gleichzeitiger Darlegung vereinfachender Rechnungs-Modifikationen. Diese letzteren, gestützt auf die Zuhilfenahme graphischer Konstruktionen und Hilfsmittel, sprechen in ihrer klar vorliegenden und jeden beliebigen Grad von Genauigkeit zulassenden Einfachheit für sich selbst. Schwieriger liegt die Sache für die Fehlerausgleichung. Diese soll unbedingte Einfachheit mit möglichster Strenge verbinden, dabei auf jeden beliebigen Fall unter Ausschliessung der individuellen Einwirkung in gleicher Weise anwendbar sein. Erleichtert wird wiederum die Aufgabe dadurch, dass es sich im Wesentlichen, der Natur des Einschaltungsverfahrens zufolge, nur um die Ausgleichung der Fehler bei der mehrfachen Bestimmung eines Punktes handelt.

Die ersterwähnte Bedingung schliesst sofort die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, aber auch die nur auf rein empirischen oder gar willkürlichen Grundlagen ruhenden Annäherungsverfahren aus; ja was die genannte strenge Methode betrifft, lässt sich sogar nachweisen, dass für unseren Fall ihre unbedingte und nicht der Natur der obwaltenden Verhältnisse gemäss modificirte Anwendung unter Umständen durchaus nicht die wahrscheinlichsten Werthe zu liefern vermag. Es beruht dies auf dem Unterschied der zwischen den in der Methode der kleinsten Quadrate betrachteten und den in unseren Arbeiten faktisch auftretenden Fehlern besteht. Freilich bleiben dann der genannten Methode noch so mannichfache Vorzüge, dass ihre Anwendung immerhin geboten erschiene, wenn nicht der hier besonders ins Gewicht fallende Kostenpunkt zu beachten wäre. Diese und ähnliche Gründe haben mich zu einer vereinfachten Ausgleichungsmethode geführt, die dabei doch den oben gestellten Forderungen möglichst genügt. Ihr zufolge wird der aus den mehrfachen Bestimmungen eines Punktes abzuleitende mittlere Ort derart bestimmt, dass die aus den Beobachtungen hergestellten Richtungswinkel den geringsten absoluten Zwang erleiden. Das daraus fliessende Rechnungsverfahren ist, wenn man sich für die vorkommenden Gewichtszahlen

VI

die im Text beschriebene graphische Hilfstafel konstruirt, einfach und rein mechanisch, so dass das Resultat in kürzester Frist und mit vollständiger Sicherheit gefunden werden kann.

Eine auf rein theoretische Betrachtungen zu stützende Ausgleichung hätte sich auch aus den oben erwähnten Helmert'schen und Jordan'schen Untersuchungen ergeben, (durch Aufstellung der mittleren Fehlerquadrate der Coordinaten). Ich war geneigt, erst diesen Weg zu gehen, aber verschiedene Erwägungen haben mich davon abgebracht. Einmal musste die Ausgleichung, wie bei mir, unter Trennung der x und y geführt worden, war also in diesem Fall auch nur ein angenähertes Verfahren, welches dennoch trotz dieser eben genannten Vereinfachung selbst bei der allerdings möglichen Anwendung graphischer Hilfstafeln umständlicher wie das meine blieb. Die bezüglich pothenot'sche Ausgleichung hätte gleichzeitig nur unter wesentlichen Modifikationen Platz greifen können. Dann leitete sich aber auch ein wesentliches Bedenken gegen dieses Verfahren aus dem Umstande ab, dass die auf eine absolute Konstanz der Grundelemente (gegebene Punkte) wie auf dem Vorhandensein gleicher Winkelmessungsfehler δ basirenden Ausdrücke für die mittleren Punktverschiebungen, für unseren Fall nicht vollständig zutreffend sind. Die relativen Lagen der uns gegebenen Punkte der Landestriangulation zeigen Differenzen, die oft über den unseren eigenen Messungen zukommenden mittleren Fehler hinausgehen und ebenso ist, wie sich a priori erweisen lässt und die Erfahrung bestätigt, für unsere Netzverhältnisse der zu befürchtende mittlere Fehler einer beobachtenden Richtung nicht nur eine Funktion der Wiederholungszahl der Einstellungen, sondern gleichzeitig auch der Entfernung. Mit grosser Annäherung kann man den Satz aufstellen, dass für Distanzen von 500 bis 4000^m in elementar-trigonometrischen Messungen die mittleren Fehler der unter gleichen Umständen beobachteten Richtungen sich umgekehrt verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Entfernungen. Diesen Verhältnissen, die sich allerdings je nach der Sachlage auch modificiren können, muss aber eine sachgemässe Ausgleichung möglichst Rechnung zu tragen suchen und sie gerade waren es, welche mich zu der vorgeschlagenen Methode

führten, von der ich nur wünsche, dass sie die Anerkennung der kompetenten Geodäten finden möge.¹⁾

Im IV. Artikel ist die Vertheilung der Coordinatendifferenzen in Polygonzügen einer kurzen Betrachtung unterzogen. Das vorgeschlagene Verfahren gründet sich darauf, dass für diese Arbeiten, eine sonst exakte Messung vorausgesetzt, die zufälligen oder eigentlichen Beobachtungsfehler mehr oder minder gegen die systematischen Fehler der Längenmessung sowie des gegebenen, bez. des nach und nach herzustellenden Punktsystems verschwinden. Das ist zwar nicht in aller Strenge, aber mit einer überwiegenden Wahrscheinlichkeit zutreffend.

Der V. Abschnitt enthält die vergleichenden Resultate zwischen der Anwendung der neuen Methode einer-, des strengen Verfahrens sowie anderer angenäherten Methoden andererseits. Obwol der Natur der Sache nach die behandelten Beispiele nur in beschränkter Zahl gegeben werden konnten, möchten die Resultate doch nicht ganz und gar jeder Beweiskraft entbehren. Die Beispiele zeigen ohne Ausnahme, wie die faktische Abweichung der durch die angenäherte Ausgleichung gefundenen Coordinaten von denen der strengen Methode, sich weit innerhalb der Grenzen der mittleren Fehler dieser letzteren bewegt, was um so mehr zu beachten ist, als die Ausgangspunkte des strengen und des angenäherten Verfahrens zum Theil wesentlich verschieden sind. Aus diesem Grunde glaube ich auch, unterstützt von den im Texte gegebenen allgemeinen Entwicklungen und in Anbetracht der so wesentlichen Zeit- und Kostenersparniss gegenüber der Methode der kleinsten Quadrate, auf eine günstige Beurtheilung der vorgeschlagenen und jedenfalls rationell zu nennenden Ausgleichungsmethoden rechnen zu dürfen. Denn so zweifellos die Unzulänglichkeit des bisherigen Annäherungsverfahrens in vielen Fällen ist, mit noch grösserer Berechtigung kann man die unbedingte und strenge Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate für unsere Arbeiten zurückweisen, d. h. soweit es sich um die wirkliche Ausgleichung praktischer Messungen handelt, während ein indirekter Einfluss genannter Methode in vielen Beziehungen und besonders

¹⁾ Ein etwas strengerer Weg für die gegebene Ausgleichungsform ist in einem Zusatz zum V. Artikel kurz angedeutet.

in Hinsicht auf Beurtheilung von Genauigkeitsgrenzen, Beobachtungsmethoden etc. immer vorhanden und jedenfalls auch zu wünschen sein wird.

Als leitender Gesichtspunkt in dieser und allen ähnlichen Fragen gilt mir immer: „Alle wesentlichen Momente an der Hand der von der Theorie aufgestellten Sätze kritisch zu prüfen und daraus gewisse Hauptregeln abzuleiten, deren Beachtung als wesentlich bedingend erscheint, dabei aber immer vor einer Uebertragung derselben in die eigentliche Praxis die hier obwaltenden Verhältnisse solchergestalt zu berücksichtigen, dass auch deren Einfluss genügend gewahrt wird.“ Die thunlichste Befolgung dieser Regel hat jedenfalls den Vorthail, vor jeder Einseitigkeit, sowol nach der theoretischen wie nach der rein empirischen Seite hin zu schützen. Dabei können freilich, je nach der grösseren Betonung des einen oder anderen Standpunktes, divergirende Meinungen nicht ausbleiben, doch wird es nicht schwer sein auch im vorliegenden Falle zu einer Verständigung zu gelangen, sobald nur jeder Einzelne immer das Hauptziel: „Möglichste Förderung der Wahrheit“ unverrückt im Auge hält. —

Die vorliegende Schrift betrachte ich in gewissem Sinne als eine Ergänzung und Weiterführung der von mir vor einigen Jahren veröffentlichten: „Dreiecksnetze IV. Ordnung etc. München 1871“, insbesondere des dortigen Kapitels über die (empirische) Ausgleichung der Messungsfehler. Es dürfte um so mehr angezeigt sein, manches dort befindliche weiter auszuführen oder zu verbessern, als alle grösseren Lehrbücher fast ohne Ausnahme der Einführung zweckmässiger „Näherungsmethoden“ eine nur geringe Beachtung schenken. In Anerkennung der Wichtigkeit des Gegenstandes für alle elementar-trigonometrischen Messungen erschien mir deshalb eine eingehende Behandlung dieser Fragen, dabei den praktischen Standpunkt mit dem theoretischen thunlichst vermittelnd, in That sehr zeitgemäss und als ein Bedürfniss der praktischen Geodäsie.

München, im Frühjahr 1875.

J. H. Franke.



Einleitung.

In neuerer Zeit ist fast allgemein bei umfangreichen Katastervermessungen die graphische Triangulirung durch trigonometrische Netzlegung ersetzt werden. Die unzweifelhaft grössere Genauigkeit dieser letzteren, verbunden mit der hier ermöglichten umfassenderen Benützung der in Zahlenwerthen gegebenen Resultate musste einen solchen Schritt mit Naturnothwendigkeit herbeiführen, und bis auf geringe Ausnahmen werden alle geodätischen Techniker den Uebergang von der graphischen Konstruktion zur trigonometrischen Rechnung als einen Fortschritt von weitgehendster Bedeutung begrüssen. In der That ist es überflüssig, den Werth der neuen Methode, die schon die Feuerprobe praktischer Anwendung in umfangreichen Landesvermessungen bestanden hat, durch besonders anzustellende Messungen erst prüfen zu wollen: Einige mathematische Formeln, gebaut auf wenige Grundwahrheiten von allgemeinsten Geltung und vervollständigt durch einfache logische Schlüsse, denen man mit Recht den Charakter mathematischer Evidenz zusprechen kann, sie genügen, um die Vorzüge des trigonometrischen Verfahrens ins hellste Licht zu setzen und zu unzweifelhafter Gewissheit zu erheben.

Eines zuweilen erhobenen Einwandes ist allerdings hier noch Erwähnung zu thun. Es betrifft dies den Kostenpunkt. Man sagt, die graphische Netzlegung sei in einem Grade einfacher und dadurch billiger, dass schon vom finanziellen Standpunkte aus ihre Beibehaltung genügend sich rechtfertige.

Die Richtigkeit des erst aufgestellten Satzes an und für sich wird ohne Weiteres zugegeben; dagegen muss ich entschieden bestreiten, dass die fragliche Differenz so ausserordentlich bedeutend sei, wie die Anhänger der unbedingten Messtischmessung vielfach behaupten. Jedenfalls aber, und wäre sie auch wirklich so gross, ist dieselbe nicht hinreichend, den bei der graphischen Bestimmung entstehenden Ausfall an Schärfe und Genauigkeit in einem auch nur annähernd ausgleichendem Masse zu ersetzen.

Vereinigt sich somit Alles, um wenigstens für genauere geodätische Arbeiten, zu welchen die Katastervermessungen zweifellos zählen, dem Theodolit das Uebergewicht zu verschaffen, so liegt doch immerhin in dem oben zugegebenen Umstande der Kostenvertheuerung eine Aufforderung, einmal durch geeignete Hilfsmittel dem Anwachsen des beregten nachtheiligen Punktes möglichst entgegen zu wirken, dann aber auch, unter steter Berücksichtigung des eben Gesagten, die Arbeiten so zu führen, dass in der That genaue und selbst weitgehenden Anforderungen genügende Resultate erlangt werden.

Die folgenden Zeilen sind diesen Bestrebungen gewidmet. Sie sollen in möglichster Einfachheit und ohne jedweden Aufwand grossartig mathematischen Apparats, Methoden zur allgemeineren Kenntniss bringen, welche den oben gestellten Bedingungen genügen und praktisch sich schon bewährt haben.

I.

Rechtwinklige sphärische Coordinaten.

Die hohe Bedeutung rechtwinkliger sphärischer Coordinaten für Zwecke der Parzellarvermessung ist schon allgemein gewürdigt. Hinlänglich bekannt ist es, dass Polar-Coordinaten dieselben für den gedachten Zweck in keiner Weise zu ersetzen vermögen und ebenso, dass die Angabe der Dreieckspunkte in geographischen Längen und Breiten hier keine andere Bedeutung hat, als die, eine an und für sich einfache Sache zu kompliziren ohne die Genauigkeit zu erhöhen.

Das von dem bayerischen Astronomen Soldner (1773—1833) zuerst in wirklich rationeller Weise zur Einführung gebrachte System rechtwinkliger sphärischer Coordinaten ist in der That so einfach und für den Anschluss der speciellen Messung eines ganzen Landes so überaus bequem und vortheilhaft, dass es bei Ausführung grösserer Katastermessungen wohl überall den Vorzug verdienen möchte, um so mehr, da seine Genauigkeit innerhalb der hier gewöhnlich gesteckten Grenzen nichts zu wünschen übrig lässt.

Das System lässt sich kurz wie folgt darstellen: Durch einen Normalpunkt wird ein grösster Kreis der Kugel, (gewöhnlich der Meridiankreis bez. die Meridianellipse des Punktes) als Vermessungsachse gelegt. Fällt man jetzt von den einzelnen Punkten

Perpendikel (als grösste Kreise derselben Kugel) auf diese Achse, so nennt man diese Perpendikel die Ordinaten, die auf der Vermessungsachse abgeschnittenen Meridianstücke die Abscissen der betreffenden Punkte. Es ist klar, dass hiernach sämtliche Ordinatenkreise in zwei Punkten, die in der Richtung nach Osten und Westen um 90° vom Normalpunkte entfernt sind, zusammenlaufen.

Den vom Westpunkte, oder mit anderen Worten, den vom jeweiligen Ordinatenkreise von Westen aus über Norden u. s. w. bis zu 360° gezählten Winkel einer beliebigen Richtung im Dreiecksnetze nennt Soldner den Direktionswinkel.¹⁾ Die Direktionswinkel einer bestimmten Linie in ihren beiden Endpunkten werden demnach um 180 plus einer kleinen Grösse, die von der Konvergenz der betreffenden Ordinatenkreise abhängt, verschieden sein. Für die Berechnung der Coordinaten eines beliebigen Punktes aus Entfernung (d) und Richtung (α) hat man einfach aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\sin v_2 = \cos d \cdot \sin v_1 + \sin d \cdot \cos v_1 \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$\sin (\xi_2 - \xi_1) = \frac{\sin d \cdot \sin \alpha}{\cos v_2} \quad (2)$$

$$\cot \alpha_2 = \cos d \cdot \cot \alpha_1 - \frac{\operatorname{tg} v_1 \cdot \sin d}{\sin \alpha_1} \quad (3)$$

Die wirkliche Anwendung dieser Ausdrücke würde, obwohl für den vorliegenden Zweck bis zu einer ziemlich bedeutenden Ausdehnung vollkommen genau, jedenfalls zu zeitraubend sein. Dieselben lassen sich aber unter Benützung der bekannten analytischen Reihenentwickelungen für die trigonometrischen Funktionen erheblich vereinfachen und zwar genügen hiezu die ersten zwei Glieder dieser Reihen. Wie leicht zu sehen wird beispiels-

weise die Vernachlässigung eines Gliedes von der Form $\frac{x^4}{r^4}$ selbst bei einer Ausdehnung von 2° erst einen Fehler von $0,005^m$ ergeben, sonach unter Berücksichtigung der Konvergenz der Reihen die ganze Fehlersumme gewiss nicht 1^m überschreiten.

In Konsequenz dieser Anschauung erhalten wir durch Einführung der gedachten Reihen und unter Vernachlässigung der vierten und höheren Potenzen, dabei gleichzeitig

¹⁾ Man kann diese Direktionswinkel auch von dem südlichen oder nördlichen Zweig der Vermessungsachse bez. von Curven aus zählen, die der genannten Achse parallel laufen. Es ist klar, dass in diesem Falle die Berechnungsformeln ganz ähnliche und nur für den Direktionswinkel stets die sinnverwandten Funktionen zu nehmen sind.

$$d \sin \alpha = m \text{ und } d \cos \alpha = n$$

und den anzuwendenden Krümmungsradius $= r$ setzend, aus den obigen Ausdrücken die Formeln:

$$y^2 = y_1 + n - \frac{m^2}{2 r^2} \left(y_1 + \frac{n}{3} \right) \quad . \quad . \quad (1)$$

$$x_2 = x_1 + m + \frac{m}{2 r^2} \left(y_1^2 - \frac{n^2}{3} \right) \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\alpha_1 = 180 + \alpha + \frac{m}{r^2 \sin 1''} \left(y_1 + \frac{n}{2} \right) \quad . \quad . \quad (3)$$

Da nun für die Ebene die Ausdrücke

$$y_2 = y_1 + n \text{ und } x_2 = x_1 + m$$

gelten, so bezeichnet man die auf n , resp. m folgenden Werthe als die Glieder der Erdkrümmungs-Korrektion. Dieselben sind, wie man sieht, Funktionen der Distanz und Richtung, sowie der Entfernung von der Vermessungsachse, derart, dass besonders die Abscissen-Korrektion bei zunehmender Entfernung in rapider Weise wächst.

Vielfach ist die Ansicht verbreitet, der Geometer könne für seine elementar-trigonometrischen Arbeiten von einer Berücksichtigung der obigen Korrektionsglieder ganz und gar absehen. Das Irrige dieser Ansicht liegt klar zu Tage; denn wenn auch für die Berechnung der hier in Frage kommenden Dreiecke von einer Inbetrachtung der Erdkrümmung selbstverständlich abstrahirt werden kann, so liegt doch in Hinsicht des Coordinatensystems die Sache ganz anders, und eine Vernachlässigung der fraglichen Korrektionsglieder wird unter Umständen Differenzen herbeiführen, die das Mass der gestatteten Fehlergrenzen weit überschreiten.

Es ist nun auffällig, dass bis jetzt noch keinerlei Versuche bekannt geworden sind, die so wichtige Berechnung der Erdkrümmungs-Korrektion durch geeignete Hilfsmittel zu vereinfachen und zu erleichtern. Eine solche Erleichterung wäre aber höchst wichtig, nicht nur für die Herstellung der scharfen Coordinatenwerthe neu zu bestimmender Signale, vielmehr noch bei der weit häufigeren Aufgabe, aus den rechtwinkligen sphärischen Coordinaten zweier gegebener Punkte deren Polar-Coordinaten (Entfernung und Direktionswinkel) zu finden.

Der nahe liegende Gedanke, die fraglichen Korrektionswerthe in Tabellen zu bringen, ist bisher noch nicht zur Ausführung gekommen, jedenfalls in der Erwägung, dass hiermit nur eine geringfügige Erleichterung geboten wäre. Denn da die betreffenden

Glieder nicht nur nach y , sondern auch nach m , resp. n fortschreiten, müsste die herzustellende Tabelle einen doppelten Eingang erhalten. Wer aber je mit solchen Tafeln viel gearbeitet hat, kennt hinlänglich das Unangenehme, welches dieselben mit sich bringen und wie leicht Interpolationsfehler unterlaufen. Die Schwierigkeit der Einschaltung lässt sich zwar durch grössere Ausdehnung der Tabellen vermindern, zugleich erhalten aber die letzteren dabei einen Umfang, der ihren Gebrauch unhandlich macht.

Die im Vorigen aufgeführten Gründe haben mich veranlasst, die in Rede stehenden Korrekturen graphisch darzustellen und hat sich diese Einrichtung so vorzüglich bewährt, dass sie mir bei meinen trigonometrischen Arbeiten geradezu unentbehrlich geworden ist. Der Zeit-, also auch der Kostengewinn ist bei umfangreichen Arbeiten nicht zu unterschätzen, ganz abgesehen davon, dass auch die Sicherheit gegenüber dem rechnerischen Verfahren eine wesentlich höhere ist.

Gehe ich jetzt zu einer Beschreibung der von mir konstruirten Tafeln über, so ist vor Allem zu bemerken, dass dieselben zunächst für das bayerische Dreiecksnetz entworfen sind, sich aber auch in anderen Netzen mit Soldner'schem Coordinatensysteme anwenden lassen, wenn der zu Grunde zu legende Krümmungsradius nicht sehr erheblich von dem für München angenommenen abweicht. Eine zu ängstliche Rücksicht ist hierbei keineswegs geboten. Beispielsweise würde der Unterschied für ein Glied von der Form

$$\frac{m y^2}{r^2}$$

wo $m = \frac{1}{500} r$ und $y = \frac{1}{30} r$ angenommen wird, zwischen 48° und 52° Breite nur $0,013^m$ betragen, somit die Tafel selbst für eine bedeutendere Breitenausdehnung benutzt werden können.

Dem bayerischen Dreiecksnetze liegt eine Erd-Abplattung von $\frac{1}{305}$ zu Grunde, wonach sich für die Breite von München der Logarithmus oder Krümmungsradius (in Metern) im Perpendikel zu

$$6,8053766$$

bestimmt. Für ein Achsenverhältniss $\frac{300}{299}$ würde der fragliche Logarithmus zu $6,805447$, der des Krümmungsradius

$$r = \frac{b}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

zu 6,80479₈

gefunden werden.

Die Tafel I der Ordinaten-Korrektion enthält die Werthe

$$m = d \sin \alpha$$

von 50 zu 50 Meter bis zu $m = 10000^m$ als Abscissen, die Werthe y_1 von 10000 zu 10000^m bis $y_1 = 200000$ (der Ausdehnung des bayerischen Netzes) als Curven aufgetragen. Die letzteren liegen, der Formel (1) entsprechend, einfach proportional über einander, so dass die graphische Interpolation sowohl mit grosser Leichtigkeit als Sicherheit zu bewerkstelligen ist. Die Durchschnitte der Curven mit feinen Horizontallinien von je 1^{mm} Abstand geben nun das erste Glied des gesuchten Korrektionswerthes für die Ordinaten. Das zweite Glied, welches bei elementaren Einschaltungsarbeiten der geringen Entfernungen wegen fast immer vernachlässigt werden kann, wird auf dieselbe Weise gefunden, wenn man y für n nimmt und mit 3 dividirt. Ueber die allenfallsige Nothwendigkeit dieses Glied mitzunehmen, gibt schon ein einziger Blick auf die Tafel Aufschluss.

Die Vorzeichen sind auf der Tafel selbst angegeben. Für das erste Glied sind sie, bezogen auf die durch den nördlichen Frauenthurm in München gelegte und bis auf etwa 15" mit dem wahren Meridiane desselben zusammenfallende Vermessungsachse, im Westen stets +, im Osten stets —; im zweiten Gliede ist das Vorzeichen entgegengesetzt dem des einfachen Faktors n .

Bezüglich der Herstellung der Tafeln (auch der Folgenden) ist noch zu bemerken, dass in der Zeichnung die feinen Vertikallinien der Abscissen sowie die entsprechenden Horizontalen der Korrektion 1^{mm} Abstand haben. Bei der photographischen Vervielfältigung der Tafeln sind sie, indess in geringem Masse, etwas verkleinert worden. Die Abscissen von 1000^m sowie die Curven von 50000^m, ebenso die Korrekturen von ganzen Centimetern sind dabei in der Zeichnung durch stärkere Linien hervorgehoben. —

Die Tafel II enthält die Abscissen-Korrektion. Hier sind die Werthe y_2 in Abständen von je 100^m bis zu 20000^m als Abscissen, die Grössen m von 100 zu 100 bis zu $m = 5000^m$ als Curven gegeben. Die Korrekturen, $\left(\frac{m}{2} \frac{y_2^2}{r^2}\right)$, können dabei direkt bis auf $\frac{1}{10}^m$ abgelesen werden.

Für Ordinaten y_2 die über 20000^m hinausgehen, (für Bayern

wie schon oben bemerkt bis zu 200000^m), sind die entsprechenden in der Abscissenachse gegebenen Werthe nur mit 10 zu multipliciren, worauf dann die Korrektion anstatt in $\frac{1}{10}$ ^{mm}, in ganzen Centimetern erhalten wird. Die Ablesung ist dabei noch eine so vollständig sichere, wie man sie nur wünschen kann. Diese letzt-erwähnte Einrichtung, welche keineswegs etwas unbequemes hat, da die Veränderung nur in dem Anhängen einer Null besteht, konnte es allein ermöglichen, der Tafel eine Ausdehnung zu geben, die sich nach Osten und Westen bis auf 2 Grade erstreckt. —

Bei der Bestimmung des zweiten Gliedes $-\frac{m n^2}{6 r^2}$, braucht man nur y_2 für n zu nehmen und das Resultat durch 3 zu dividiren, doch gilt hier ebenfalls die schon oben bei dem betreffenden Gliede der Ordinate gemachte Bemerkung.

Die Vorzeichen jedes der beiden Glieder richten sich immer, sei es Osten oder Westen, nach dem des einfachen Faktors m oder n , nur dass im ersten Gliede dasselbe direkt, im zweiten entgegengesetzt zu nehmen ist.

Ausgezeichnete Werthe der Curven oder Abscissen sind wie schon bei der ersten Tafel, auch hier durch stärkere Linien hervorgehoben.

Die dritte Tafel endlich, die Direktionswinkel-Korrektion enthaltend, hat die einfachste Einrichtung, da hier kein quadratisches Glied vorkömmt.

In der Abscissenachse sind die Werthe von 100 zu 100^m bis zu 20000^m, die Curven, (welche hier zu Geraden werden), von 1000 zu 1000^m wieder bis zu 20000^m gegeben. Es ist dabei gleichgiltig, wo man das y , und wo das m aufsucht; gewöhnlich wird man, der grösseren Genauigkeit halber, das kleinere Glied in der Abscissenachse interpoliren.

Die Korrekturen sind unmittelbar in $\frac{1}{100}$ Sekunden gegeben; wenn man aber, ähnlich wie bei der zweiten Tafel, einem der gegebenen (hier beliebigen) Werthe mit 10 multiplicirt, wird das Glied direkt in $\frac{1}{10}$ Sekunden erhalten.

Das zweite Glied ist sofort durch die Annahme

$$n = \frac{y}{2}$$

gegeben und hinsichtlich der Vorzeichen gilt einfach,

	Im Osten:		Im Westen:
für	$\begin{cases} m \text{ positiv: } - \\ m \text{ negativ: } +; \end{cases}$	für	$\begin{cases} m \text{ positiv: } + \\ m \text{ negativ: } -. \end{cases}$

Für das zweite Glied hat man ebenso:

Gleiche Zeichen +, ungleiche Zeichen —.

Die Anwendung der Tafeln ist so ausserordentlich einfach, dass sie sofort aus der den letzteren gegebenen Einrichtung hervorgeht. Die Zeitersparniss ist zugleich eine bedeutende, so zwar, dass ich in wenig mehr Sekunden dasselbe leiste, was mir die Rechnung nur in Minuten gibt.

Am meisten tritt dies hervor wenn man, wie so häufig, genöthigt ist, Polar-Coordinationen aus rechtwinkligen zu rechnen.

Die für diesen Fall anzuwendenden Formeln (bezogen auf unsere Zahlungsweise der Direktionswinkel), sind dann bekanntlich:

$$n = y_2 - y_1 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2 r^2} \left(y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{3} \right);$$

$$m = x_2 - x_1 - \frac{(x_2 - x_1)}{2 r^2} \left(y_2^2 - \frac{(y_2 - y_1)^2}{3} \right);$$

$$\frac{m}{n} = \operatorname{tg} \alpha; \quad d = \frac{m}{\sin \alpha} = \frac{n}{\cos \alpha}.^1)$$

Es ist sofort ersichtlich, welch' zeitraubende Arbeit die numerische Rechnung verursachen würde, aber auch, welche Erleichterung hier die Tafeln gewähren, insoferne man nur $(x_2 - x_1)$ für m und $(y_2 - y_1)$ für n zu nehmen und der Korrektion das entgegengesetzte Zeichen zu geben braucht. Besonders rasch gefördert wird dadurch die „pothenot'sche“ Festlegung eines Punktes, wenn dabei überzählige Richtungen eingeschnitten und dieselben zu einer exakten Ausgleichung benutzt werden sollen. —

Aus dem Vorhergehenden dürfte mit hinreichender Sicherheit zu entnehmen sein, wie die Benützung der fraglichen Tafeln, die mit geringen Kosten photographisch vervielfältigt worden sind, in der That einen Zeit-, also auch Kostengewinn in sich schliesst und somit der in der Einleitung aufgestellten Forderung: „Methoden zu finden, welche die exakte Ausführung trigonometrisch-geodätischer Bestimmungen zu erleichtern geeignet sind,“ hier schon in einem Falle Genüge geleistet wurde.

¹⁾ Man kann zwar d und α auch direkt berechnen, jedoch ohne Gewinn an Genauigkeit und jedenfalls ohne die im Obigen liegende Kontrolle der Rechnung.

II.

Die Einschaltung trigonometrischer Punkte in ein gegebenes Dreiecksnetz.

Die Einschaltung weiterer trigonometrischer Punkte in ein gegebenes Dreiecksnetz gehört mit zu den in der praktischen Geodäsie am häufigsten vorkommenden Arbeiten. Dies um so mehr, als in neuerer Zeit fast überall geodätische Detail-Operationen nicht isolirt, sondern nur im Anschluss an grössere Netzverbindungen ausgeführt werden. Es ist deshalb, schon in Rücksicht auf die folgenden Untersuchungen, angezeigt, den Gegenstand einer kurzen Betrachtung vom praktischen Standpunkte aus zu unterziehen und dabei gewisse Grundsätze aufzustellen, deren Beachtung die Erreichung günstiger Resultate zu verbürgen im Stande ist.

Bevor ich in die eigentliche Erörterung des vorbemerkten Themas eintrete, muss ich einige hierbei auftretende Begriffe und Bezeichnungen genauer präcisiren. Es ist so oft von Dreiecksnetzen III. und IV. Ordnung die Rede, ohne dass deren unterscheidende Merkmale immer genau und unzweifelhaft festgestellt wären und ohne dass dasselbe Wort immer denselben Begriff deckte. So z. B. bezeichnet man im Allgemeinen die zur unmittelbaren Aufnahme der Gemarkungen dienenden Netze als solche IV. Ordnung, während wiederum in Ländern, die nicht nach Fluren oder Gemarkungen, sondern nur nach zusammenhängenden Messblättern messen (wie dies beispielsweise in Bayern stattfindet), der Begriff des Gemarkungsnetzes gar nicht existirt. Ich meine aber, jede Zweideutigkeit des Begriffes wird vermieden, einmal durch Angabe der durchschnittlichen Entfernungen der Netzpunkte, resp. die Nennung der auf eine bestimmte Fläche entfallenden Anzahl derselben, dann auch durch die Bezeichnung des Zweckes, dem sie unmittelbar dienen sollen. Hiernach verstehe ich unter einem Dreiecksnetz III. Ordnung ein solches mit Dreiecksseiten von 1 bis 2 Kilometer Länge, so dass etwa 1 Punkt auf 2,5 □Km. fällt. Diese Punkte dienen der unmittelbaren Bestimmung des Dreiecksnetzes IV. Ordnung, mit Entfernungen von 0,5—1 Km., oder durchschnittlich auf 1 □Km. 2 Punkte, als Grundlage. An diese letzteren werden bei der Messtischaufnahme die graphischen Hauptpunkte, bei der Theodolit-Messung die trigonometrischen Polygonzüge für die unmittelbare Detailmessung angeschlossen.

Für die Bestimmung der Punkte IV. Ordnung hat man im Wesentlichen fünf verschiedene Verfahrungsweisen:

1. Man beobachtet auf den Hauptpunkten (II. und III. Ordnung) die Richtungen nach den Nebenpunkten (IV. Ordnung);
2. man beobachtet auf den Nebenpunkten die Richtungen nach den Hauptpunkten;
3. man beobachtet die Richtungen sowohl auf den Haupt- wie den Nebenpunkten;
4. man spannt zwischen zwei Hauptpunkten ein Netz IV. Ordnung aus, rechnet die Lage dieser Punkte vorläufig mit einer Basis von fingirter Länge und fingirtem Azimuth (Richtungswinkel) und bestimmt aus der Vergleichung der Resultate mit den Werthen der gegebenen Hauptpunkte die wirkliche Lage der Nebenpunkte;
5. man leitet aus den Punkten höherer Ordnung endlich eine oder mehrere Basen ab und gründet auf diese das Netz IV. Ordnung.

Einer Vergleichung dieser Methoden hat die Feststellung der Anforderungen vorherzugehen, welche an solche einzuschaltende Punkte erhoben werden. Hier ist es nun von bestimmenden Einfluss, ob die Messung, wie es jetzt bei den meisten Katastervermessungen geschieht, nach Fluren, bez. Gemarkungen vorgenommen, oder aber ein System zusammenhängender Messblätter, deren jedes mit den vier anliegenden auf's Genaueste zu verbinden ist, festgehalten wird. Die erst erwähnte Verfahrungsweise kann sich ohne grossen Nachtheil der vierten der oben erwähnten Einschaltungsmethoden bedienen; denn da die Gemarkungen unabhängig für sich aufzunehmen sind, so kommt es in der That nur auf die genaue relative Lage (der Punkte unter sich) an und es ist nicht von Bedeutung, wie sich die Punkte eines nebenliegenden, einer anderen Aufnahme dienenden Netzes zu denen des ersten Gemarkungsnetzes stellen. Diese Einschaltungsmethode wird denn auch in der That vielfach empfohlen und hat meines Wissens in Preussen, Hessen, der Schweiz u. s. w. Anwendung gefunden. Für erheblich kürzer als die anderen der oben erwähnten Verfahrungsweisen möchte ich die Legung einer solchen Dreieckskette nicht halten, auch nicht für genauer, besonders dann nicht, wenn man die Dreiecke nur an einander reiht und ängstlich jedes Durchschneiden der Dreiecksseiten, resp. jedes Einschneiden von Diagonalen vermeidet, während doch anerkanntermassen letzteres

Verfahren die Zuverlässigkeit eines Netzes sehr erhöht.¹⁾ Aber auch abgesehen hiervon wird die fragliche Einschaltungsmethode bei dem zweiten Messungssystem gar nicht anwendbar sein; denn hier verlangt der nach allen Seiten genau herzustellende Anschluss der einzelnen Messblätter eine möglichst scharfe Orientirung nach *allen* Seiten und diese Forderung involvirt für die trigonometrischen Punkte eine ganz ähnliche, nämlich dass diese nach *allen* Richtungen möglichst gut unter sich harmoniren und beispielsweise Unterbrechungen der Stetigkeit, wie sie die Verbindung der Punkte zweier neben einander liegender, aber gesonderter Netze zeigen würde, nicht vorkommen dürfen. Der ununterbrochene Fortgang und Anschluss der Detailarbeiten im letzterwähnten Messungssystem verlangt ein Gleiches von der trigonometrischen Einschaltung und stellt höhere Anforderungen an dieselbe, als bei der gesonderten Fluren- oder Gemarkungsmessung.

Betrachten wir die fünfte der oben aufgeführten Methoden (sie wurde z. B. bei der Katastervermessung des Herzogth. Sachsen-Gotha angewandt und ist in meiner Schrift: „die Dreiecksnetze vierter Ordnung etc.“ München 1871, besonders beschrieben), so ist dieselbe wohl der vierten in allen hauptsächlichen Beziehungen gleich zu stellen, hat aber vor dieser entschiedene Vorzüge voraus, wenn man auf die mehrfache Bestimmung der einzelnen Punkte nicht verzichtet und sich nicht bloß mit *einer* abgeleiteten Basis benügt, vielmehr innerhalb des Netzes mehrere Punkte unmittelbar von den Hauptpunkten her bestimmt.

Indess lässt sich nicht bestreiten, dass zu einer Erreichung strenger und zugleich allen an solche Punkte überhaupt zu stellenden Anforderungen entsprechender Resultate die vierte und fünfte Verfahrungsweise, in der Art wenigstens, wie ich sie kennen lernte, kaum genügen dürften und nur durch eine sachgemäße Verbesserung der letzten oder durch die ersten Methoden das angestrebte Ziel einer möglichst sicheren Feststellung der Nebenspunkte nach *allen* Richtungen hin erreicht werden kann.

In theoretischer Beziehung dürfte nun, wie Helmert's und Jordan's Untersuchungen gezeigt haben²⁾, die zweite Methode,

¹⁾ Dem gewöhnlichen Sprachgebrauch zufolge nenne ich eine Folge einfach an einander gereihter Dreiecke eine *Dreieckskette*, wenn aber Diagonalen eingeschnitten sind, ein *Dreiecksnetz*.

²⁾ Helmert: Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie, Leipzig 1868, und Jordan: Ueber die Genauigkeit einfacher geodätischer Operationen, Schlömilch Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1871.

welche nichts weiter als eine wiederholte Anwendung des pothenotischen Problems ist, den Vorzug verdienen. Die theoretische Betrachtung zeigt nämlich, dass die fragliche Verfahrungsweise im Allgemeinen schärfere Resultate liefert als die erste Methode, und nur in speciellen Fällen, bei besonders ungünstiger Lage der in Frage kommenden Punkte, hinter dieser zurück bleibt. Aber auch in praktischer Beziehung möchte die „pothenotische“ Bestimmung, d. h. des Verfahrens, bei welchem man auf einem Nebenspunkte die Richtungen nach 3 gegebenen Hauptpunkten misst und daraus durch bekannte mathematische Entwicklungen die Position des Punktes findet, den Vorzug vor der erst erwähnten Methode verdienen. Diese praktischen Vorzüge begründen sich durch den Wegfall der mühsamen Signalisirung der Nebenspunkte, wie auch durch den Umstand, dass die gegebenen Punkte der Landes-Triangulation in der Regel (weil dominirender oder höher gelegen) von den zu bestimmenden Signalen aus besser gesehen werden, als umgekehrt diese von jenen. Bedenkt man ferner noch, dass wir gleicherweise der oft beschwerlichen Centrirungen auf den Punkten II. oder III. Ordnung, die vielfach Kirchthürme sind, überhoben werden und dass überhaupt die Beobachtungen keinen grösseren Zeitaufwand als bei der ersten Verfahrungsweise beanspruchen, so möchten alle diese Umstände für die pothenotische Einschaltung sprechen.

Die aus diesen Ergebnissen zu ziehenden Schlüsse bedürfen indessen eines Korrektivs, einmal wenn die Entfernungen der neu zu bestimmenden Punkte unter sich verhältnissmässig nicht bedeutend, dann aber auch, wenn etwaige Fehler in der *relativen* Lage derselben von bedeutenderem Einflusse sind als die Abweichungen ihrer absoluten Position (z. B. die Abweichungen gegenüber dem Haupt-Coordinatensystem der Landesvermessung). Stützt man nämlich die Bestimmung der Nebenspunkte *nur* auf Hauptpunkte, so liegt die Befürchtung nahe, dass die *gegenseitige* Lage der ersteren, da sie jeder *direkten* Verbindung ermangeln, leicht Differenzen aufzeigen kann, die im Hinblick auf die vorausgesetzten kurzen Entfernungen bezüglich der Orientirungen und Anschlüsse vielfach zu Unzuträglichkeiten führen werden. Diese Gefahr würde, ein sonst exaktes Arbeiten vorausgesetzt, erheblich in den Hintergrund treten, wenn wir eine absolut genaue Lage der gegebenen Punkte und zugleich eine günstige Situirung derselben gegenüber den zu bestimmenden Punkten voraussetzen könnten. Da das natürlich im Allgemeinen nicht der Fall sein

wird, so ist es aus diesem Grunde wünschenswerth, die Nebenkpunkte, wenigstens immer die sich zunächst liegenden, mit einander in direkte Verbindung zu setzen. Beachten wir alle diese Verhältnisse, so kann man für eine solche successive Einschaltung von Punkten folgende allgemeine Sätze aufstellen:

1. Auf jedem pothenotisch festzulegenden Punkte sind nie bloss 3, sondern wo möglich stets 4—6 gegebene Punkte anzuschneiden; denn dies ist schon wegen der präsumtiven Unsicherheit der Lage der Punkte III. Ordnung, die oft, besonders bei älteren Triangulationen, nicht nach rationellen Grundsätzen bestimmt sind und vielfach erhebliche Differenzen aufzeigen, geboten.
2. Der gesuchte Punkt muss zu den gegebenen eine möglichst günstige Lage haben und insbesondere wird es zweckmässig sein, wenn letztere nicht blos nach einer Richtung, sondern, wenn möglich, rings im Horizonte liegen; dies Letztere ist an und für sich einleuchtend, die theoretische Untersuchung zeigt aber noch speciell, dass die günstigste Lage des zu bestimmenden Punktes die Mitte des von den drei gegebenen Punkten gebildeten Dreiecks ist. Mit abnehmender Genauigkeit folgen dann: Seitenmitte, nahe der Ecke in der Winkelhalbierungslinie, nahe der Ecke in der Seite, der auspringenden Ecke des gegebenen Dreiecks gegenüber, im rückwärts verlängerten Winkelraum. Die letztgenannte Lage ist die ungünstigste und kann, wie längst bekannt, unter Umständen die Auflösung ganz unbrauchbar machen. Etwas besser wird die letzte Bestimmung, wenn der Punkt von dem gegebenen Dreiecke sich beträchtlich entfernt und zugleich möglichst weit der Halbirungslinie liegt.
3. Unter den anzuschneidenden Punkten müssen sich im Allgemeinen immer ein bis zwei der nächst gelegenen von den zuvor erst eingeschalteten Punkten befinden, während die übrigen dem System der Landes-Triangulation angehören; es soll durch dieses Verfahren einestheils die Verbindung der Nebenkpunkte unter sich, anderentheils aber auch deren inniger Anschluss an das grössere Dreiecksnetz (III. Ordnung), gesichert werden.
4. Aus drei günstig gelegenen Punkte sind dann die vorläufigen Coordinaten des gesuchten Punktes zu rechnen und die übrigen anvisirten Punkte, sofern es sich um besonders wichtige Festlegungen handelt, zu einer Ausgleichung nach

der Methode der kleinsten Quadrate heranzuziehen; für die meisten Fälle wird indess die weiter unten aufzustellende Korrektionsmethode mit ausserordentlichem Vortheil anzuwenden sein.

5. Beim Fortgange der Arbeiten, (sobald sich diese über grössere Flächen erstrecken), sind in zweckmässiger Auswahl nach und nach einzelne Punkte der Landes-Triangulation fallen zu lassen und an deren Stelle neue aufzunehmen, so dass, wenn bei besonderer Gestaltung der Arbeit die Bestimmung auf den Ausgangspunkt zurückkehrt, successive die zuerst benützten Signale wieder zur Festlegung der Punkte IV. Ordnung herangezogen werden.

Bei der Befolgung vorstehender Sätze ist wol mit Sicherheit auf eine befriedigende Lösung der gestellten Aufgabe: „in ein gegebenes Netz eine grössere Anzahl trigonometrischer Punkte IV. Ordnung einzuschalten“, zu rechnen, und zugleich wird der Arbeitsaufwand, wenn auch grösser wie bei der vorhin besprochenen Einschaltung einer *Dreieckskette*, doch kein unverhältnissmässiger genannt werden können, wenn man die solcherweise zu erlangende Präcision in's Auge fasst. Aus diesem Grunde möchte das „pothenotische“ Einschaltungssystem für die meisten Fälle nur empfohlen werden können. —

Das erste Verfahren, nach welchem man auf den Hauptpunkten nur die Richtungen nach den Nebenpunkten beobachtet (es ist dies bei Bestimmung *eines* Punktes das „Vorwärtseinschneiden“), steht im Allgemeinen, theoretisch betrachtet, hinsichtlich der zu erlangenden Genauigkeit der pothenotischen Bestimmung nach, aber auch praktisch dürfte sich diese Methode weniger empfehlen, einmal weil die Visur von einem höher gelegenen nach einem tiefer liegenden Punkte, der nur mittels einer schwachen Stange signalisirt ist und öfters schlechten Hintergrund hat, entschieden ungünstiger ist als nach der umgekehrten Richtung; dann aber auch, weil wir uns in diesem Falle öfters genöthigt sehen würden, excentrische Aufstellungen zu nehmen. Wer aber die Beschaffenheit der Mehrzahl solcher Punkte III. Ordnung, Dorf-Kirchthürme, kennt, wird leicht ermessen, welchen Schwierigkeiten sowol als auch welchen Ungenauigkeiten die Beobachtungen in diesem Falle unterliegen werden. Dieselben Gründe sprechen auch gegen eine allgemeine Anwendung der dritten Methode (bei nur zwei Hauptpunkten, also *einem* Dreieck mit drei gemessenen Winkeln, einfach „Triangulirung“ genannt), da hier ganz dieselben Verhältnisse

bezüglich der Beschaffenheit der Hauptpunkte stattfinden. Theoretisch genommen wäre freilich, wenn man bei den ersten drei Verfahrensweisen immer *gleich* viel Hauptpunkte berücksichtigt, die dritte Methode die vorzüglichste Leistung, doch würde damit auch der Arbeitsaufwand sich annähernd verdoppeln. Nur wenn man, um dies zu vermeiden, bei der „Triangulierung“ weniger Hauptpunkte heranzieht, wird sie mit den ersten Methoden vergleichbar. Die Genauigkeit hängt dann natürlich, nächst anderen beeinflussenden Umständen, von der Anzahl der beizuziehenden Hauptpunkte ab, so dass sie mit einer Verringerung dieser Anzahl ebenfalls geringer wird. Stützt man sich bei der „Triangulierung“ nur auf wenige Hauptpunkte, so möchte im Allgemeinen die zweite Methode immer vorzuziehen sein, wenn dies nicht schon aus den oben erwähnten praktischen Gründen zu folgern wäre.

Indessen lässt sich nicht läugnen, dass eine vollkommen konsequente Durchführung der zweiten Einschaltungsmethode nach den in 1. bis 5. aufgestellten Grundsätzen in besonderen Fällen auf unüberwindliche Schwierigkeiten stossen kann und hier die Methode der „Triangulierung“ anzuwenden ist.

Beispielsweise kann dies geschehen, wenn wegen Terrain- oder Anbau-Hindernissen die gegebenen Signale hauptsächlich nur nach *einer* Richtung hin sichtbar sind und dadurch die Situation für „pothenotische“ Bestimmung, wenigstens theoretisch betrachtet, ungünstig wird.

In diesem Falle und zugleich als allgemeinste Norm dienend, möchte ich folgende Verfahrensweise, welche nichts weiter als eine sachgemässe Modifikation der fünften der obigen Einschaltungsmethoden ist, empfehlen.

Es seien in dem zu triangulirenden Terrain eine Anzahl fest bestimmter Punkte *A, B, C* etc. der Landestriangulation gegeben. Diese Punkte (II. bis III. Ordnung) werden der Mehrzahl nach als *Thürme* angenommen, so dass eine direkte Aufstellung nur mit Schwierigkeit zu bewerkstelligen wäre. Wir ziehen desshalb vor, in der ganzen zu triangulirenden Gegend nach den in den früheren fünf Sätzen angedeuteten Gesichtspunkten eine beschränkte Anzahl Signale III. bis IV. Ordnung (etwa auf 2,5 □Km. eines) pothenotisch einzuschalten.

Diese einzuschaltenden Punkte, bei deren Auswahl nur die Rücksicht auf möglichst günstige Situirung und keineswegs eine solche hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit für den Anschluss graphischer oder polygonometrischer Nebenpunkte mass-

gebend war, werden *bei geschickter Anordnung* sowol unter sich als mit dem System der Landestriangulation in sicherer Verbindung stehen, um so mehr als auf ihnen die Beobachtungen in grösserer Schärfe auszuführen sind. Dass hierbei eine gleichmässige Präcision nach allen Seiten so viel als möglich anzustreben ist, zugleich aber der Arbeitsaufwand mit den zu erreichenden Zwecken nicht im Missverhältniss stehen darf, möchte selbstverständlich sein.¹⁾

Betrachten wir nun diese pothenotisch eingeschalteten Punkte als absolut fest, so können wir von ihnen als Stützpunkten ausgehend, die übrigen Signale unseres Einschaltungssystems in gewöhnlicher Weise „trianguliren“. Für diese Triangulirung möchten sich zweckmässig folgende Normen aufstellen lassen:

1. Jeder Punkt ist aus 2—4 Dreiecken zu bestimmen, denn in der That ist ein solches Verfahren, ganz abgesehen von der Kontrolle, welche es gewährt, mehr wie die blose Vermehrung der Winkelmessung geeignet, schärfere Coordinatenwerthe zu liefern.

2. In jedem Dreiecke sind thunlichst alle drei Winkel zu messen, besonders dann, wenn der der Basis gegenüberliegende Winkel $< 90^0$ wird.

3. Die Basen der zu berechnenden Dreiecke werden hauptsächlich von den Verbindungslinien der pothenotisch eingeschalteten Punkte, zum Theil aber auch von den zuvor erst berechneten Dreiecksseiten abgegeben, um die zu triangulirenden Punkte auch thunlichst in direkte Verbindung zu setzen.

4. Die Bestimmung der mittleren Coordinatenwerthe mehrfach bestimmter Punkte hat nach einer zweckmässigen und für alle Verhältnisse möglichst gleichmässig und schematisch zu handhabenden Näherungsmethode zu erfolgen.

5. Die Auswahl der zur Triangulirung heranzuziehenden Punkte ist so zu treffen, dass, wenn bei besonderer Situirung der Arbeit die Bestimmung auf den Anfangspunkt zurückkehrt, successive die früheren Ausgangspunkte wieder zur Triangulirung herangezogen werden, und so eine Unterbrechung der Stetigkeit möglichst vermieden wird.

Dies sind die hauptsächlichsten Sätze, welche ich für eine solchergestalt zu führende Einschaltungstriangulirung für mass-

¹⁾ Am Schluss des III. Artikels, nach Erledigung der wichtigen Ausgleichungsfrage, wird noch ein zweckmässiges, die eben gestellten Forderungen thunlichst erfüllendes Einschaltungsverfahren für diese Ausgangspunkte zur Erörterung kommen.

gebend halte. Wol ist einzuräumen, dass ein solches Verfahren grösseren Arbeitsaufwand verursacht, als die nach Methode 4. ausgeführte Einschaltung einer besonderen Dreieckskette, aber ich meine, dass auch die Präcision der so erhaltenen Resultate nach allen Seiten hin eine höhere sein und selbst weiter gehenden Anforderungen genügen wird. Ich will ferner dabei keineswegs in Abrede stellen, dass unter Umständen die genannte vierte Methode für genügend erachtet werden kann, aber wie schon oben bemerkt, wird doch im Allgemeinen die gesonderte Einschaltung der Punkte III. bis IV. Ordnung auf pothenotischem Wege oder mittels einer nach den vorigen Grundsätzen ausgeführten Triangulirung, wenn die Beobachtungen geschickt und sachgemäss geleitet werden, den Vorzug verdienen.

III.

Ausgleichungs-Methoden für einzuschaltende Dreieckspunkte III. und IV. Ordnung.

Insoferne bei der trigonometrischen Festlegung einzelner geodätischer Fixpunkte oder ganzer Systeme von solchen nur die unumgänglich nöthigen Bestimmungsstücke gemessen werden, sind die betreffenden Punkte eindeutig bestimmt, d. h. es resultirt für sie nur ein einziger, fest bestimmter Ort. Sobald aber überschüssige oder mehr wie nothwendige Beobachtungen hinzutreten, wird man im Allgemeinen für einen solchen Punkt auch mehrere Oerter finden und es entsteht die Aufgabe, die gegebenen Beobachtungen derart zu verbessern, genauer gesagt, zu ändern, dass nur ein einziger Ort für den fraglichen Punkt resultirt.

Diese letztere Operation, die sogenannte Ausgleichung der Beobachtungsfehler, kann nun in verschiedener Weise vorgenommen werden. Sie ist höchst einfach, wenn nur die Bedingung gegeben ist, in möglichster Kürze, also mit geringstem Kostenaufwand zum Ziele zu kommen, und ebenso, wenn aus den einzelnen Oertern der wahrscheinlichste mittlere Ort gefunden werden soll.

Die erste Bedingung deutet auf das einfache arithmetische Mittel, die zweite, allgemeiner Annahme nach, auf die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate hin.

Es ist schon oft die Frage aufgeworfen worden, ob die letzt-

genannte Methode nicht auch in der niederen Geodäsie zu einem ähnlichen reformatorischen Einfluss gelangen könne, wie in den höheren Theilen dieser Wissenschaft und in der Astronomie. Soweit es sich um Theorie der Instrumente, bez. Beobachtungsmethoden, und um die Feststellung gewisser allgemeiner Grundsätze handelt, ist die gestellte Frage unbedingt zu bejahen, hinsichtlich der wirklichen Ausgleichung grösserer praktischer Arbeiten aber ebenso entschieden zu verneinen.

Es ist nicht bloss der, allerdings in seiner Bedeutung nicht zu unterschätzende, Kostenpunkt, den ich als abweisendes Moment nenne. Er bildet wol einen der hauptsächlichsten, aber nicht den alleinigen der Gründe, welche gegen die Anwendung der in Rede stehenden Methode auf die praktischen Aufgaben der elementaren Geodäsie vorgebracht werden können. Ich will dabei ganz abstrahiren von dem Umstande, dass die Methode streng genommen nur auf eine unendlich grosse, oder milde, eine „sehr grosse“ Anzahl von Beobachtungen angewandt werden dürfe, wie auch davon, dass die die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers v ausdrückende analytische Funktion

$$\varphi(v) = \frac{h}{V\pi} \cdot e^{-h^2 v^2}$$

eigentlich von gewissen Grenzen an, die von den die Beobachtung begleitenden Umständen abhängen, konstant bez. 0 sein müsste; vielmehr gründet sich die Verneinung der oben gestellten Frage wesentlich darauf, dass für unsere Arbeiten nicht wie die Methode verlangt

$$\varphi(+\Delta) = \varphi(-\Delta),$$

ist, d. h. dass hier gleiche positive Fehler mit den entsprechenden negativen Fehlern nicht gleich wahrscheinlich sind.

Für den Kundigen bedarf dieser Satz keines Beweises, denn alle in der Praxis obwaltenden Umstände sprechen für ihn. Ich brauche hier nur an die Aufstellungs- und die Signalisierungsfehler als solcher zu erinnern, welche in unseren Arbeiten wohl durch grössere Sorgfalt in engere Grenzen eingeschlossen, aber nie bis zu einem solchen Grade eliminirt werden können, dass ihr Einfluss auf die Winkelmessung verschwindend zu nennen wäre. Diese Fehler sind, wie wol zu beachten, keine Beobachtungsfehler, da sie des hauptsächlichsten Kriteriums dieser, nämlich durch Vermehrung der Beobachtungen immer kleiner zu werden, gänzlich

entbehren. Ob wir unsere Beobachtungen auch in unendlicher Zahl wiederholten, die durch die oben erwähnten Ursachen bewirkte Abweichung kann unter Umständen doch weit grösser sein als der für unser Instrument bekannte mittlere Winkelfehler wahrscheinlich macht. Erwinnere ich nun noch an die durch starke einseitige Erwärmung verursachten periodischen Differential-Bewegungen mancher unserer Signal-Objekte (Kirchthürme u. s. w.) ein Punkt, der gewöhnlich übersehen wird, nichts desto weniger aber dennoch Beachtung verdienen möchte, ferner an die relativen Unsicherheiten der uns gegebenen und als absolut fest angenommenen Punkte etc., so wird die obige Behauptung genügend gerechtfertigt erscheinen.

Damit ist nun keineswegs gesagt, dass die geschilderten Umstände die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ausschliessen, wol aber, dass wir nicht berechtigt sind, die solcher-gestalt zu erlangenden Resultate als wahrscheinlichste zu bezeichnen und ebenso, dass es in diesem Fall ohne Nachtheil gestattet ist, die strenge Methode vereinfachenden Modifikationen zu unterwerfen. Dieser Punkt ist von höchster Wichtigkeit und es wäre nur sehr zu wünschen, dass auch in anderen als dem hier in Rede stehenden Gebiete jeder Anwendung der fraglichen Methode eine kritische Untersuchung voranginge, ob denn auch die vorliegenden Verhältnisse eine strenge Ausgleichung gebieten oder auch nur zulässig machen.

Der Kreis der Anwendung jener Methode würde sich damit wol verengen, aber keinesfalls zu deren Nachtheil und jedenfalls wäre man dann sicher, weniger als jetzt von so erstaunlich kleinen wahrscheinlichen Fehlern u. dergl. selbst in Fällen reden zu hören, wo die Natur der Umstände Fehler von so geringem Betrage als absolut unmöglich erscheinen lässt. —

Sind wir sonach berechtigt, in unseren Einschaltungsarbeiten von einer strengen Ausgleichung abzusehen, so fragt es sich noch, in welcher Weise wir die exakte Methode modificiren sollen. Die Antwort kann, je nach dem Zwecke der Arbeit und den angewandten Mitteln, verschieden ausfallen, im Wesentlichen lassen sich aber doch einige wenige Hauptpunkte aufstellen, deren Erfüllung sich als unbedingt erforderlich zeigt, soll anders die Ausgleichung wenigstens einigermaßen auf einen praktisch-wissenschaftlichen Werth Anspruch erheben können.

Diese Punkte sind die folgenden:

1. Die zu wählende Ausgleichungsmethode soll den für den je-

weiligen Fall stattfindenden mathematischen Beziehungen wie den aus der Erfahrung geschöpften Umständen annähernd Rechnung tragen und auf möglichst geringe Korrektur der *unmittelbar gemessenen* Elemente hinwirken;

2. sie soll auf eine *beliebige* Zahl von mehrfachen Bestimmungen eines Punktes in gleicher Weise anwendbar sein;

3. sie soll ferner das Resultat von der grösseren oder geringeren Befähigung des Manipulirenden thunlichst unabhängig machen und endlich

4. soll sie ein leichtes und *rein mechanisches* Arbeiten bei nicht zu grossem Zeitaufwand gestatten.

Diese Forderungen möchten wohl allseitig zu billigen sein; sehen wir nun zu, wie die einzelnen bis jetzt bekannten Näherungsmethoden denselben gerecht werden.

Als einfachste Näherungsmethode ist wol die Annahme des einfachen arithmetischen Mittels aus den durch gesonderte Berechnung der Dreiecke enthaltenen Coordinatenwerthen zu bezeichnen. Die 2., 3. und 4. Forderung werden hier erfüllt, um so weniger aber die erste. Es wird keine Rücksicht auf die günstige oder ungünstige Form der Dreiecke, die doch das Resultat so sehr beeinflussen, genommen. Gleichgiltig ist es ferner, ob in einem Dreieck nur 2, in dem anliegenden aber alle 3 Winkel gemessen sind. Ebenso ändert dieses Verfahren im Allgemeinen den Richtungswinkel kürzerer Linien viel mehr als den der längeren, und endlich wird für blos 2 Dreiecke der Mittelwerth stets auf den mittleren Strahl (der gemeinschaftlichen Seite) genommen, so dass die mittleren Winkel ganz ungeändert bleiben.

Ein zweites Verfahren ist die sogenannte „übereinstimmende Dreiecksberechnung“, bei der württembergischen Landesvermessung und, so viel ich weiss, auch bei den preussischen Katastervermessungen angewandt. (Ich habe die Methode in meiner oben genannten Schrift ebenfalls beschrieben und ein Beispiel gerechnet.) Auch hier werden die letzten Forderungen zum grössten Theil, nicht aber die erste erfüllt. Der Umstand, dass nur die Winkel α und β sich immer um gleiche, bloss mit verschiedenen Vorzeichen versehene Beträge, die Winkel γ sich aber gar nicht ändern, was eine nicht zu rechtfertigende Bevorzugung der letzteren in sich schliesst, dass ferner im Wesentlichen die Methode für den einzelnen Fall nur die Benützung *dreier* Hauptpunkte zulässt und der gesuchte Punkt immer auf den mittleren Strahl er-

halten wird, alle diese Erwägungen, meine ich, möchten nicht für eine allgemeine Anwendung des fraglichen Verfahrens sprechen.

Als dritte Methode führe ich hier das unter dem Namen „badische Ausgleichungsmethode“ bekannt gewordene „graphische“ Verfahren, von dem badischen Oberst Tulla herrührend, an. Die näheren Modalitäten sind von Professor Jordan in einem hieher gehörigen Aufsätze, enthalten im Monatsblatt des badischen Geometervereins, (Jahrgang 1871, Nr. 2—5) und von Professor Rebstein in dessen Lehrbuch der praktischen Geometrie beschrieben. Hier genüge nur die Mittheilung, dass man die am gesuchten Punkte vermöge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler entstehende Schnittfigur (die einzelnen Strahlen von den gegebenen Punkten nach dem gesuchten sollen sich hier sämmtlich in letzterem durchschneiden, was im Allgemeinen nicht geschieht und eben dadurch die fehlerzeigende Figur entsteht) in grossem Massstabe zu etwa $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{4}$ aufträgt und nun in dieser Figur nach dem „praktischen Gefühl“ den Punkt bestimmt. Die Aenderungen der Richtungswinkel werden mittels eines Diagrammes gefunden und dann aus diesen und den verbesserten Längen die Coordinaten gerechnet.

Das vorstehende Verfahren erfüllt in aller Strenge nur die zweite Forderung, die erste nur bei *sehr geschickter* Handhabung. Der dritten und vierten Bedingung wird, wie leicht zu ersehen, nicht entsprochen, denn die Annahme des gesuchten Punktes nach dem „praktischen Gefühl“ lässt nur unter der Voraussetzung eines geübten praktischen Blickes ein günstiges Resultat erwarten, während die Unterbrechung der mechanischen Arbeit des Rechners durch die Nothwendigkeit der graphischen Auftragung der fehlerzeigenden Figur nach den Differenzen der gemeinschaftlichen Seiten und den auf der Station gebildeten Winkeln einer leichten und mechanischen Erledigung der Arbeit nicht gerade sehr förderlich ist. Indess wenn auch dieser letzterwähnte Umstand nur ganz unerheblich oder gar nicht ins Gewicht fällt, ist doch die Einführung eines so vagen Begriffs wie der „des praktischen Gefühls“, für exakte Arbeiten wol kaum zu billigen und jedenfalls wird man zugeben, dass sich des Leiters umfassender trigonometrischer Messungen ein Gefühl der Unsicherheit bemächtigen kann, wenn er solch' wichtige Arbeiten Technikern anvertrauen muss, bei denen er entweder gar keine oder doch nur eine geringe Ausbildung dieses „praktischen Gefühls“ zu befürchten hat. Die individuelle Begabung vermag unter Umständen gewiss viel im einzelnen Falle, wo es sich aber um

instruktionsgemäss auszuführende Arbeiten handelt, müssen unbedingt feste Normen gegeben sein, selbst wenn dieselben nicht immer das erreichbar Beste liefern sollten.

Die vierte, vom Steuerrath Kerschbaum in der „Zeitschrift für Vermessungswesen“, Jahrg. 1874, Heft 2, veröffentlichte Methode nimmt als den zu suchenden Punkt den Mittelpunkt des in das fehlerzeigende Dreieck eingeschriebenen Kreises an. Hieraus folgt sofort, dass sie nur bei 2 Dreiecken oder 3 Strahlen anwendbar ist, was unserer zweiten Bedingung widerspricht. Wol wird der dritten Forderung, um so weniger aber der ersten und vierten Bedingung entsprochen. Denn das Resultat ist ein gleiches, ob in dem einen Dreieck nur 2, in dem andern 3 Winkel gemessen sind, ob ferner das eine Dreieck von sehr günstiger, das andere von sehr ungünstiger Form ist. Wenn ferner in dem fraglichen Aufsatz bemerkt ist, dass dieses Verfahren die Korrektion der Winkel für die langen Strahlen stets verhältnissmässig geringer mache als die der kurzen, so ist mir der Grund dafür nicht recht ersichtlich. In einem speciellen Falle dürfte allerdings das Verfahren zu günstigen Resultaten führen, wenn nämlich die beiden Dreiecke nahezu von gleicher Form sind.

Betrachten wir endlich noch eine fünfte Ausgleichungsmethode, die fast durchgängig bei der Berechnung des trigonometrischen Netzes in Bayern Anwendung gefunden hat und von dem Astronomen Soldner herrührt. Das Verfahren ist in Kürze folgendes: Mit Berücksichtigung der Dreieckswinkelsumme werden zuerst alle in dem vorliegenden Punktsystem vorkommenden Richtungswinkel (Direktionswinkel, auch zuweilen, obwol uneigentlich, Azimuthe genannt) gleich gestellt, hierauf die einzelnen Dreiecke gerechnet und endlich für eine der doppelt berechneten Seiten (sogenannte Communseite) unter Berücksichtigung aller beeinflussenden Momente ein bestimmter Werth angenommen und nach diesem sämtliche Dreieckswinkel und Seiten mit Hilfe der ausgesetzten logarithmischen Differenzen korrigirt. Bestimmte Vorschriften, welche der mitunter mehrfach vorkommenden Communseiten und mit welchem Betrage dieselbe willkürlich anzunehmen ist, lassen sich im Allgemeinen nicht geben; es hängt dies ganz von der Geschicklichkeit und dem raschen Ueberblick des Manipulirenden ab, der sein Augenmerk immer auf die Herbeiführung der geringfügigsten Winkelkorrekturen und proportionaler Seitenverbesserungen zu richten hat.

Man ersieht aus dieser Darstellung, dass, wenn bei dem Ver-

fahren auch die erste und zweite Bedingung gewahrt werden mag, doch um so weniger die dritte und zum Theil auch die vierte erfüllt wird. Es kann hier nicht ausbleiben, dass öfters versuchsweise Rechnungen vorkommen und der Arbeitende dabei immer noch nicht sicher ist, ob nicht auf demselben Wege ein noch etwas besseres Elementensystem zu erreichen gewesen wäre. Aus diesem Grunde möchte auch diese Korrektionsmethode nicht zur allgemeinen Anwendung empfohlen werden können. —

Mancherlei Anregungen in meiner Berufsthätigkeit und die gewiss nicht wegzuläugnenden Mängel, welche den eben kurz besprochenen Näherungsmethoden in dieser oder jener Richtung anhaften, veranlassten mich der Sache näher zu treten und einen Weg zu suchen, der allen oben aufgestellten Forderungen möglichst gleichmässig entspricht. Indem ich die gefundenen, übrigens höchst einfachen und nahe liegenden Resultate im Folgenden darlege, erhebe ich dabei keineswegs den Anspruch, das Beste geleistet, wol aber Wege gezeigt zu haben, welche jetzt schon zu befriedigenden Resultaten führen und jedenfalls in weiterer und umfassenderer Ausdehnung noch besseres zu leisten versprechen.

Des Hauptprincip nun, auf welches das unten entwickelte Ausgleichungsverfahren sich stützt, lässt sich kurz wie folgt aussprechen:

„Die für die mehrfache Bestimmung eines Punktes hergestellten Richtungen sollen durch die vorzunehmende Ausgleichung oder die Bestimmung eines mittleren Ortes den geringsten absoluten Zwang erleiden“.

Die nähere Begründung dieses Satzes, wenn anders er einer solchen noch bedarf, lässt sich in einfacher Weise erledigen, nachdem zuvor über die Ermittlung der einzelnen Oerter aus den vorliegenden Beobachtungen noch einiges bemerkt worden ist.

Es ist keineswegs nothwendig, die einzelnen Coordinatenwerthe sämmtlich numerisch zu rechnen, vielmehr kann dieses in weit einfacherer aber darum nicht minder sicherer Weise durch Zuhilfenahme einer sofort auszuführenden graphischen Konstruktion geschehen. Während diese indess bei Dreiecksverbindungen auf denselben Grundlagen wie die numerische Rechnung beruht, erfordert bei „pothenot'scher“ Bestimmung die veränderte Sachlage eine bestimmte, sogleich näher zu definirende Voraussetzung.

Wie bekannt, bestand bisher für das letztgenannte Problem, wenn man auf eine strenge Ausgleichung verzichtete, nur ein einziges Annäherungsverfahren: Die wiederholte Rechnung aus

je 3 Punkten und Annahme eines Mittelwerthes aus den gefolgerten Coordinaten.

Dieser Weg hatte seine Uebelstände, wie besonders den Zeitaufwand, die bisweilen auftretende Unmöglichkeit, ausser der ursprünglichen noch eine andere passende Kombination je dreier Punkte zu finden und wo auch dies nicht der Fall, die Schwierigkeit, deren relatives Genauigkeitsverhältniss angemessen zu schätzen, ganz abgesehen davon, dass die entstehenden Resultate mehr oder minder von einander abhängig sind.

Das Weitläufige und in vielen Beziehungen auch Unzulängliche dieses Verfahrens in Fällen, wo ich doch wiederum zu einer strengen Ausgleichung nicht greifen konnte oder wollte, einsehend, hat mich nun auf einen besonderen Gedankengang geführt. Ich bringe nämlich die aus der Vergleichung zwischen Rechnung und Beobachtung sich ergebenden Verbesserungen der einzelnen Richtungen nach den gegebenen Punkten derart an, dass für jeden besonderen Fall gleichzeitig die geringstmögliche Veränderung des vorläufig gefundenen Ortes resultirt.

Erläutern wir das näher.

Auf den zu bestimmenden Punkt sind die Richtungen nach n gegebenen Punkten beobachtet, dabei aus dreien derselben und zwar denen der günstigsten Kombination, vorläufige Coordinaten x und y gerechnet worden. Die eben gestellte Bedingung wird uns sonach berechtigen, den gefundenen Ort schon als einen möglichst genäherten und nur noch geringer Korrekturen bedürftigen zu betrachten.

Rechnet man jetzt mit den erwähnten vorläufigen Coordinaten x und y die Direktionswinkel (Azimuthe) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ etc. nach sämtlichen eingeschnittenen Punkten, (hierbei sind die im I. Art. beschriebenen graphischen Hilfstafeln von ausserordentlichem Nutzen), so gibt deren Vergleichung mit den beobachteten und immer von einer bestimmten Anfangsrichtung aus gezählten Richtungs-Unterschieden o_1, o_2, o_3 etc. kleine Abweichungen bez. einzuführende Verbesserungen zu erkennen, nämlich

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= (\varphi_1 + \zeta + o_1) - \varphi_1 \\ v_2 &= (\varphi_1 + \zeta + o_2) - \varphi_2 \\ v_3 &= (\varphi_1 + \zeta + o_3) - \varphi_3 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (I)$$

wo ζ die Unsicherheit der Anfangsrichtung φ_1 ausdrückt.

Setzt man der einfacheren Uebersicht halber die Differenzform

$$(\varphi_1 + o_n) - \varphi_n$$

gleich

$$\lambda_n$$

so folgt:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = \lambda_1 + \zeta \\ v_2 = \lambda_2 + \zeta \\ v_3 = \lambda_3 + \zeta \\ v_4 = \lambda_4 + \zeta \\ \text{etc.} \end{array} \right\} \dots \dots (2)$$

Es ist einleuchtend, dass hier diejenigen λ , welche den zur vorläufigen Coordinatenrechnung benützten Punkten angehören, ganz oder doch nahezu gleich 0 erscheinen werden. Indessen ist es durchaus gerechtfertigt, ihnen, (abgesehen von der Entfernung), in den nachfolgenden Operationen gleiches Gewicht mit den übrigen zuzuerkennen, da der Voraussetzung zufolge diese Punkte doch der möglichst günstigsten Kombination angehören.

Um nun zunächst ζ zu aliminiren, nehmen wir aus den obigen Gleichungen das arithmetische Mittel, jedoch unter Berücksichtigung der für die Azimuthalabweichungen so massgebenden Entfernungen, so dass dem eben Gesagten zufolge und in Anbetracht, dass die Summe der Verbesserungen gleich 0 zu setzen ist, wird:

$$\zeta = - \frac{r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2 + r_3 \lambda_3 + r_4 \lambda_4 + \text{etc.}}{[r]} \dots \dots (3)$$

Wird der hieraus resultirende Werth von ζ in den Gl. (2) substituirt, so erhalten wir in den v sofort die an unseren jetzigen Richtungen anzubringenden Verbesserungen.

Die schon oben ausgesprochene Bedingung verlangt nun, diese letzteren in einer die geringsten linearen Ortsverschiebungen ergebenden Weise vorzunehmen, da sonst der geforderten Richtungs-Korrektion in unendlicher Zahl Genüge geleistet werden könnte. Es wird aber die geringste Linearänderung offenbar erhalten, wenn wir dieselbe rechtwinklig zur gegebenen Richtung nehmen, da für die hier in Betracht kommenden kleinen Winkel v der Bogen als mit der Tangente zusammenfallend betrachtet werden darf.

Demzufolge hat man für diese Ortsverschiebungen Δ die Ausdrücke

$$\Delta_1 = \frac{r_1 v_1}{206265}, \Delta_2 = \frac{r_2 v_2}{206265}, \text{etc.} \dots \dots (4)$$

und aus diesen sofort die Coordinatenverbesserungen

$$\left. \begin{aligned} d x_1 &= \Delta_1 \cos (\varphi_1 \pm 90^\circ) = \mp \Delta_1 \sin \varphi_1 \\ d y_1 &= \Delta_1 \sin (\varphi_1 \pm 90^\circ) = \pm \Delta_1 \cos \varphi_1 \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (5).$$

Die Zufügung dieser Korrekturen zu x , bez. y gibt uns sofort so viele Oerter für den gesuchten Punkt als eingeschnittene Richtungen vorhanden sind; jeder derselben würde für sich der geforderten Richtungsverbesserung Genüge leisten und die nachfolgende Ausgleichung hat nur diese Einzelwerthe zu einem angemessenen Mittelwerthe zu vereinigen.

Es könnte der Einwand erhoben werden, dass dieses Verfahren sowol hinsichtlich der Abhängigkeit der einzelnen Oerter von den vorher gefundenen Coordinaten als in Betreff des Arbeitsaufwandes keine Verbesserung gegen das früher genannte Verfahren involvire; ich glaube indess das Gegentheil darthun zu können.

Zunächst ist klar, dass eine etwaige Unsicherheit des vorläufigen Orts auch von bestimmenden Einfluss auf die sich zeigenden Richtungsdivergenzen sein, sich in ihnen ausdrücken und damit auch die nachfolgenden Korrekturen beeinflussen wird. Zugleich muss die Bedingung, aus den drei Punkten günstigster Kombination zu rechnen, den vorläufigen Ort schon mit solcher Sicherheit geben, dass er in der That als ein möglichst genäherter, der nur noch geringer Korrekturen bedarf, betrachtet werden kann. Es ist dabei zu erwägen, wie die erwähnte Bedingung in den meisten Fällen eine eindeutige und nicht zu Zweifeln Anlass gebende sein wird; zum mindesten aber möchte ich keinen größeren Spielraum darin erblicken, als die vorliegenden Verhältnisse überhaupt gestatten, insofern eine gewisse Willkür in der Wahl der von dem betreffenden Techniker heranzuziehenden Hilfselemente (gegebene Punkte) in vielen Fällen ohnehin schon vorhanden und nicht zu vermeiden ist. Dies gilt, nebenbei bemerkt, bis zu einem gewissen Grade auch für eine Bestimmung, die sich zur nachfolgenden Ausgleichung der strengen Methode bedient.

Der zweite Punkt lässt sich in gleich zufriedenstellender Weise erledigen. Wol kann von der Bedingung, den vorläufigen Ort scharf zu rechnen, nicht abgegangen werden, aber diese Rechnung ist mit Kontrolle in höchstens einer Stunde ausgeführt und die darauf folgende Bestimmung der Direktionswinkel ist durch

die Benützung der oben beschriebenen Erdkrümmungskorrektions-Tafeln bedeutend erleichtert.

Die in der Gl. (3) auftretenden Entfernungen können für den vorliegenden Zweck genau genug aus der Triangulirkarte oder approximativ den ohnehin zur Kontrolle der Richtungen gerechneten logarithmischen Werthen der r entnommen werden, wobei sich dann für die Gl. (2) als Rechnungsprüfung noch

$$[v] = [\lambda] + n \zeta = n \left(\zeta + \frac{[\lambda]}{n} \right) \dots (6)$$

ergibt.

Die Grössen Δ in (4) werden nicht gerechnet, sondern einem durch Photographie vervielfältigten Diagramm entnommen, welches dieselben für jede beliebige Entfernung und für $v = 1''$ bis $v = 20''$ in Tausendtheilen der Masseinheit gibt. Es ist diese Abnahme für jeden Punkt in einigen Sekunden bewirkt.

Etwas zeitraubend würde die numerische Berechnung der Ausdrücke (5) sein; dieselbe ist deshalb durch eine noch volle Sicherheit gewährende Konstruktion ersetzt.

Auf einem mit feinen Quadraten von 2 bis 5^{mm} Seitenlänge bedeckten Bogen (sogenannten Gitterbogen) wird ein Durchschnittspunkt als der gerechnete Ort und die durchschneidenden Seiten als Coordinatenachsen angenommen. Trägt man jetzt von dem gewählten Punkte aus mit Hilfe eines Transporteurs die gerechneten Richtungen (genau genug bis $\frac{1}{2}$ Grad) und an diese mit einem scharf rechtwinkligen Dreiecke die dem Diagramm entnommenen Δ in der durch ihr Zeichen vorgeschriebenen Weise an, so gibt dies sofort die gesuchten einzelnen Orte, deren Coordinatenabweichungen in Bezug auf den gerechneten Punkt in einigen Minuten aus dem Quadratschema abzulesen sind. —

Bevor wir jetzt zu der vorzunehmenden Bestimmung eines mittleren Ortes für alle einzeln erhaltenen Orte schreiten, ist die Coordinaten-Berechnung in Dreiecksverbindungen, mögen nun die betreffenden Punkte durch „Vorwärtseinschneiden“, „Triangulierung“ oder „Seitwärtsabschneiden“ festgelegt sein, ähnlichen vereinfachenden Modifikationen zu unterwerfen.

Hier tritt uns zunächst, sofern der Punkt „triangulirt“ ist, die Nothwendigkeit einer vorläufigen Vertheilung der Dreieckswinkel-Widersprüche entgegen; es sollen nämlich, wenn wir vorerst bei zwei neben einander liegenden Dreiecken stehen bleiben, die Gleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma + e - 180 = 0$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + e_1 - 180 = 0$$

$$\beta + \beta_1 + \Delta = \psi_1 - \psi$$

erfüllt werden, wo e und e_1 die Verbesserungen im Dreieck, ψ und ψ_1 die Direktionswinkel von dem beiden Dreiecken gemeinschaftlichen Punkte B aus nach den links, resp. rechts liegenden gegebenen Objekten A und A₁ sind.

Es ist nothwendig, die zu suchenden Verbesserungen, bei welchen der Einfachheit halber von dem Unterschiede zwischen Winkel- und Richtungsbeobachtungen ganz abstrahirt und zunächst das Vorhandensein gleicher Wiederholungszahlen vorausgesetzt wird, in möglichst kurzer und für alle Fälle anwendbarer Weise zu geben. Ich setze deshalb

$$\varepsilon = \frac{e}{3} \text{ und } \varepsilon_1 = \frac{e_1}{3}$$

und bestimme dann die Verbesserungen v und v_1 für β und β_1 aus

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\Delta + (\varepsilon - \varepsilon_1)}{2} \\ v_1 &= \frac{\Delta - (\varepsilon - \varepsilon_1)}{2} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

woraus

$$v + v_1 = \Delta$$

wie es sein soll.

Die Ableitung der Ausdrücke ist leicht und da für die übrigen der zur Bestimmung des Punktes dienenden und sich den vorigen anschliessenden Dreiecke dasselbe Verfahren wiederholt zur Anwendung kommt, so sind die sämtlichen Winkelverbesserungen in kürzester Frist gefunden. Natürlich wird dies besonders erleichtert, wenn die Dreiecke nur nebeneinander und nicht ineinander liegen; doch ist auch für den letzteren Fall die obige Formel in succesiver Anwendung giltig.

Die Gl. (7) haben die denkbar einfachste Form, indess zeigt eine eingehendere Betrachtung, dass sie nicht in aller Strenge den thatsächlichen Umständen Rechnung tragen. Sie setzen voraus, dass sowol Winkelmessung wie Azimuthableitung von den Längen der Winkelschenkel unabhängig seien; das ist aber keineswegs der Fall.

Unter der für unsere Arbeiten wol immer giltigen Annahme, dass wir es nur mit Entfernungen zu thun haben, welche weder die optische Kraft der anzuwendenden Fernröhre übersteigen, noch einen nennenswerthen Fehler durch Lateral-Refraktion befürchten

lassen, lässt sich behaupten, dass sich der mittlere Richtungsfehler δ aus zwei Gliedern

$$\pm \frac{k}{\sqrt{r}} \text{ und } \pm k$$

zusammensetzt, von denen das erste die Einstellungs- oder die ihnen doch ähnlich wirkenden Fehler, verbunden mit denen der durch das Zittern der Bilder entstehenden, das zweite die Unsicherheit der Ablesung etc. ausdrückt. Beide Glieder sind (durch k und k_1) vom Instrument bez. der Wiederholungszahl (n) der Beobachtung, das erste aber und somit auch der ganze Fehler

$$\delta = \sqrt{\frac{k^2}{r} + k_1^2} \dots \dots (8)$$

von der Entfernung abhängig; in welchem Masse freilich, bleibt vorerst unbestimmt und nur eine Ableitung der k und k_1 aus einer umfassenderen Reihe von Beobachtungen könnte darüber Aufschluss verschaffen. ¹⁾

Der Fehler der Azimuthableitung ist stets umgekehrt proportional der Entfernung und eine Funktion der Unsicherheit der Netzpunkte. Da aber diese letztere höchstens zu schätzen, nie aber mit Sicherheit zu bestimmen ist, so bleibt es sofort unmöglich, beide zu befürchtende Fehler für unseren Zweck in eine bestimmte, analytisch auszudrückende Verbindung zu bringen. Für viele Fälle indess und besonders, wenn die Längen der beiden Dreiecksbasen sehr verschieden sind, lässt sich wenigstens der präsumtive Fehler der Azimuthableitung in einfacher Weise verwerthen, wenn man die Gl. (7) umformt in

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{c_1 \Delta}{c + c_1} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2} \\ v_1 &= \frac{c \Delta}{c + c_1} - \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

wo c und c_1 die Grundlinien der beiden Dreiecke bedeuten. —

Die jetzt vorzunehmende Berechnung der Dreiecksseiten ist bekannt, aber die darauf folgende Coordinatenbestimmung, welche in Hinsicht auf unsere Ausgleichung in jedem einzelnen Drei-

¹⁾ Eine approximative Bestimmung für ein Instrument mit 20" direkter Nonienablesung (5—10" Schätzung) und einem Fernrohr von 20maliger Vergrößerung gibt mir für eine Doppelbeobachtung:

$$k^2 = 150000$$

$$k_1^2 = 36;$$

ich komme im Folgenden auf den Gegenstand zurück.

ecke zu bewirken nothwendig ist, kann wie früher auf graphischem Wege erfolgen, wenn nur vorher aus einem Dreiecke die Coordinaten des Punktes scharf und mit Kontrolle gerechnet sind.

Zu diesem Zwecke nehmen wir auf einen der oben erwähnten Gitterbogen wieder einen Durchschnittspunkt zweier Linien als den eben gerechneten Ort an und tragen die Richtungen der beiden Dreiecksseiten mit dem Transporteur auf. Die Punkte nun, welche die nebenliegenden Dreiecke liefern, müssen, wie leicht zu sehen, (da die Direktionswinkel [Azimuthe] zuvor gleich gestellt sind), auf diesen Richtungen, resp. deren Verlängerungen liegen; sie lassen sich also auf diesen aus den Differenzen der gerechneten Dreiecksseiten auftragen. Damit dies in leichter Weise geschehen könne und man nicht nöthig habe, die numerischen Werthe der Seiten aufzuschlagen, habe ich eine kleine Tabelle konstruirt, welche mit den Argumenten

Seiten-Logarithmus und logarithmische Differenz
sofort die lineare Differenz in Hunderteltheilen der Masseinheit liefert.

Trägt man an die so bestimmten Punkte mit Hilfe des Transporteurs den auf der Station gemessenen Winkel (genügend bis zu $\frac{1}{2}$ Grad) auf, so erhält man die zweiten Richtungen dieser neuen Dreiecke und indem dieses Verfahren sich eventuell analog wiederholt, erlangt man in wenigen Minuten die sämmtlichen aus den einzelnen Dreiecken resultirenden Oerter.

Die Ablesung der hierdurch bestimmten Coordinatenabweichungen (in Beziehung auf den angenommenen scharf gerechneten Ort) ist dann in kurzer Zeit zu bewirken und somit der erste Theil unserer Aufgabe, nämlich die aus jedem Dreiecke resultirenden Coordinatenwerthe des zu bestimmenden Punktes herzustellen, erledigt.

Es bedarf wol keiner Hervorhebung, wie dieses Verfahren, besonders bei einer grösseren Zahl der zur Bestimmung herangezogenen Dreiecke, die Arbeit erleichtert und doch eine gleichzeitige Kontrolle, sowol der Dreiecksseiten-Rechnungen, wie der Konstruktion gewährt, wenn das letzte Dreieck zum Anschluss gebracht wird. Ohne Kontrolle bleibt freilich die Ablesung der Coordinatenabweichung, doch da diese Arbeit für eine Reihe von 4—5 Dreiecken in noch weniger Minuten zu bewerkstelligen ist, so kann sofort keine Schwierigkeit darin gefunden werden, dieselbe noch einmal kontrolirend zu wiederholen; die Zeitersparniss gegenüber dem rechnerischen Verfahren ist dann immer noch in

überwiegendem Masse vorhanden, was in bestimmender Weise für die vorgeschlagene Methode sprechen möchte.

Gehen wir jetzt zu unserer eigentlichen Aufgabe, der Ausgleichung, oder mit anderen Worten, der Bestimmung eines mittleren Ortes über, so ist das leitende Hauptprincip schon oben S. 23 ausgesprochen worden. Die kaum als nöthig zu erachtende Begründung desselben suche ich darin, dass wir, eine sachgemässe vorläufige Vertheilung der Winkelwidersprüche vorausgesetzt, trotz der früher erwähnten systematischen Fehler, welche unsere Winkelmessung beeinflussen können, logischer Weise jeden der hergestellten Direktionswinkel, für sich allein genommen, als den wahrscheinlichsten betrachten müssen, da er gleichzeitig die Richtungsableitung in sich begreift. Ebenso sind wir aber genöthigt, auch den aus jedem Dreieck, resp. jeder Richtung gefundenen Ort für sich als den wahrscheinlichsten anzusehen, dem bis zu einer gewissen Grenze ein annähernd gleiches Gewicht wie jedem der übrigen zukömmt. Dies letztere stützt sich auf die von mir behauptete und durch Gl. (8) ausgedrückte Beschaffenheit des mittleren Fehlers einer Richtungsangabe; dann hauptsächlich aber auch auf die That- sache, dass bei den in neuerer Zeit an solche Einschaltungsarbeiten gestellten Genauigkeitsanforderungen die Wirkungen der zufälligen oder eigentlichen Beobachtungsfehler mehr oder minder gering zu nennen sind gegen die durch die relativen Unsicherheiten der gegebenen Netzkpunkte bewirkten Verschiebungen.

Dieser letztere Punkt bedarf noch einer Erörterung.

Selbstverständlich rede ich hier nicht von ganzen Netzver- drehungen oder Verzerrungen, da ja, wie leicht durch eine Differential-Drehung der Coordinatenachsen zu zeigen ist, der zu bestimmende Punkt an dieser Verzerrung Theil nimmt; vielmehr habe ich nur die relativen Coordinaten-Unsicherheiten im Auge, die sich zwar theilweise mit den Messungsfehlern kompensiren können, jedenfalls aber in ihrem grösseren Betrage wirksam bleiben. Hier ist es nun wieder der Direktionswinkel, welcher in seiner für weitere Entfernungen verhältnissmässig schärferen Ableitung zugleich mit der neu hinzutretenden Winkelmessung dahin wirkt, die Ortsverschiebungen nicht, wie die bisherige, auf alle Fälle aber irrthümliche, Annahme will, gerade proportional der Länge stattfinden zu lassen, sondern dafür ein viel minderes Verhältniss zu setzen, dass in der Quadratwurzel der Länge einen nahe zutref- fenden Ausdruck finden wird.

Die eben behauptete Unsicherheit der Netzkpunkte ist überall,

wenn auch in verschiedenem Grade vorhanden. Für das bayerische Dreiecksnetz II. Ordnung ist dieselbe ziemlich hoch und, absolut genommen, für jeden Punkt auf $\pm 0,15^m$ zu schätzen. Wenn ich nun annehme, dass dort, wo man auf eine scharfe und nach allen Seiten hin mit möglichst gleicher Präcision erfolgende Einschaltung Werth legt, im Durchschnitt für 1 Km. Entfernung selten ein höherer Richtungsfehler als etwa $\pm 8-10''$ gestattet werden dürfte, so ersieht man schon daraus, wie die obige Behauptung, dass die Beobachtungsfehler mehr oder minder gegen die relativen Fehler der Netzpunkte verschwinden, gerechtfertigt ist.

Hieraus ergibt sich aber in leicht mathematisch zu begründender Folgerung, wie die auf eine absolute Konstanz der Grundelemente sowie auf dem Vorhandensein von bloß zufälligen und zugleich von der Entfernung unabhängigen eigentlichen Messungsfehlern basirenden theoretischen Ausdrücke für die wahrscheinlichsten Punktverschiebungen eine Veränderung und zwar in dem Sinne erleiden müssen, dass diese letzteren wol immerhin noch, aber nicht in dem bisher angenommenen Masse von Dimension und Form der Richtungsverbindungen abhängig sind. Wol wirken die aus der Unsicherheit der Netzpunkte fließenden Längendifferenzen proportional den Entfernungen, aber die im umgekehrten Verhältniss der Distanzen stehenden Fehler der Azimuthableitung im Verein mit den Fehlern der Winkelmessung für die ein ähnliches gilt, stehen dem ersten zum Theil entgegen. —

Die analytische Verwerthung des oben aufgestellten Princip wird nach dem Vorhergehenden keine Schwierigkeit mehr bieten. Bezeichnet man mit $d\varphi$ die nothwendigen Veränderungen, welche die einzelnen Richtungswinkel bei der Bestimmung eines mittleren Ortes erleiden müssen, so hat man nach bekannten Sätzen sofort die Gleichung:

$$[gd\varphi^2] = \text{Minimum},$$

d. h. die Summe der mit ihren eventuellen Gewichten multiplicirten Quadrate der Richtungsverbesserungen soll ein Kleinstes werden.

Hier ist zuvor noch die Frage hinsichtlich der Gewichte einer kurzen Betrachtung zu unterwerfen.

In einem Dreiecke mit den gegebenen Winkeln α und β , der Seite c und dem Direktionswinkel φ dieser letzteren, bestimmen

sich die Richtungen φ_1 und φ_2 der zugehörigen Seiten r_1 und r_2 aus

$$\varphi_1 = \varphi - \beta \text{ und } \varphi_2 = \varphi + \alpha,$$

wonach sich die mittleren Fehler zu

$$\Delta_1 = \sqrt{\Delta^2 + \Delta_{\beta}^2} \text{ und } \Delta_2 = \sqrt{\Delta^2 + \Delta_{\alpha}^2}$$

finden.

Bleiben wir bei dem ersten Ausdrucke stehen, so ist zunächst, wenn wir den gegebenen Punkten eine gewisse Unsicherheit zuzuschreiben genöthigt sind, der mittlere zu befürchtende Fehler einer Richtungsableitung eine Funktion des reciproken Werths der Entfernung, folglich wird man setzen können

$$\Delta^2 = \frac{\kappa^2}{c^2}$$

wo κ eine Konstante ist.

Der mittlere Fehler einer Richtung besteht ferner nach Gl. (8) aus zwei Gliedern, von welchen das eine $\left(\pm \frac{k}{\sqrt{r n}}\right)$ von der Entfernung und der Wiederholungszahl n der Beobachtungen, das andere $\left(\pm \frac{k_1}{\sqrt{n}}\right)$ nur von letzterer abhängig ist. Der hieraus resultirende Ausdruck

$$\delta = \frac{\sqrt{\frac{k^2}{r} + k_1^2}}{\sqrt{n}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (10)$$

harmonirt vollkommen mit der Erfahrung, seine Richtigkeit lässt sich aber auch, wie wir später sehen werden, a priori erweisen. Für jetzt finden wir, die n immer als gleich vorausgesetzt, den Fehler einer Winkelmessung

$$\Delta_{\beta} = \frac{\sqrt{k^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{c}\right) + 2 k_1^2}}{\sqrt{n}}$$

Dessen hinzufügen an $\Delta = \pm \frac{\kappa}{c}$ gibt sofort

$$\Delta_1 = \frac{\sqrt{\frac{n \kappa^2}{c^2} + k^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{c}\right) + 2 k_1^2}}{\sqrt{n}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

und entsprechend für die zweite Richtung

$$\Delta_2 = \frac{\sqrt{\frac{n \kappa^2}{c^2} + k^2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{c}\right) + 2 k_1^2}}{\sqrt{n}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (11)$$

während die rein theoretische Ableitung für beide gegeben hätte

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \pm k_0 \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Eine exakte Einführung der Ausdrücke (11) in die vorzunehmende Ausgleichung ist, wenn auch keineswegs unmöglich, doch äusserst schwierig und dabei immer noch schwankend. Zunächst erscheint es sofort unthunlich, das gegenseitige Verhältniss zwischen α einer-, sowie k und k_1 andererseits, scharf bestimmen zu wollen, während dagegen die absoluten Werthe dieser letzteren selbst aus gegebenen Beobachtungen und für bestimmte Netzverhältnisse verhältnissmässig leichter abzuleiten sind. Wie schon früher bemerkt, habe ich für ein von mir benütztes Instrument und bei unseren Signalisirungsverhältnissen für die Doppelbeobachtung gefunden:

$$k^2 = 150000$$

$$k_1^2 = 36.$$

Substituirt man diese Zahlenwerthe in die Gl. (10), wobei ich $n = 3$, als die in unseren Einschaltungsarbeiten durchschnittlich übliche Wiederholungszahl der Doppelbeobachtungen, setze, so erhält man nachstehende mittlere Richtungsfehler, die sich auch anderweiten, gleichfalls der Erfahrung entlehnten Resultaten ziemlich genau anschliessen.

Entfernung. Mittlerer Fehler. Verhältnisszahlen.

100 ^m	$\pm 22,6''$	1,0
400 ^m	11,7	1,9 bez. 1,9
900 ^m	8,2	2,8 „ 1,4
1600 ^m	6,6	3,4 „ 1,3
2500 ^m	5,7	4,0 „ 1,2
3600 ^m	5,1	4,4 „ 1,1
4900 ^m	4,7	4,8 „ 1,0

Es liegt nahe, dass unsere Ausgleichung, die neben der Beachtung der durch die Theorie gebotenen Vorschriften wesentlich auch auf die Verwerthung der durch Erfahrung gewonnenen Resultate ausgeht; auf die in der Gl. (10), bez. in den obigen Reihen ausgedrückten Verhältnisse wird Rücksicht nehmen müssen. Der Widerspruch mit der theoretischen Annahme, die den mittleren Fehler bei gleichzeitigen, unter denselben Umständen wiederholten Beobachtungen nur als eine Funktion der Wiederholungszahlen darstellt, tritt klar zu Tage. Diese Wahrnehmung in Verbindung

mit dem Ausdrücke $\frac{x}{c}$ ¹⁾ hat mich auch neben anderen bedingenden Momenten besonders veranlasst, die Ausgleichung entsprechend zu modificiren, dabei konnte aber eine Berücksichtigung der letzt geschilderten Verhältnisse nur in so weit eintreten, als sie dem gleichzeitigen Zwecke einer Arbeits- bez. Rechnungsverminderung dienten.

Der Gang der Ausgleichung wurde nun folgender.

Die als Funktion der die gegebenen Punkte verbindenden Linie c auftretenden Glieder in Formel (II) wurden bei der vorläufigen Vertheilung der Winkelwidersprüche für sich berücksichtigt, was zu den Gl. (3) bez. (9) führte. Nachdem mit den so korrigirten Winkeln die Ortsbestimmungen vorgenommen waren, sind die mittleren Fehler der hergestellten Richtungen bis zu einem gewissen Grade der Annäherung nur noch Funktionen des eigentlichen Messungsfehlers in der Richtung des Schenkels. Dieser letztere kann aber, wie die obige Reihe ergibt, selbst bis zu erheblichen Entfernungsdifferenzen nahezu umgekehrt proportional der Entfernung gesetzt werden, wonach sich sofort der mittlere Fehler unserer Richtungswinkel durch $\pm \frac{m}{\sqrt{r}}$, also das Gewicht durch

$$g = \frac{r}{m^2}$$

darstellen lässt. Wenn das letztere selbstverständlich auch nicht in aller Strenge zutreffend ist, so wird es sich doch auf jeden Fall der Wahrheit mehr nähern, als die gewöhnliche Annahme, wonach alle g einander gleich oder wenigstens nur von den Wiederholungszahlen n der Beobachtungen abhängig sind.

Halten wir also unsere Annahme, $g = \frac{r}{m^2}$, fest, so ergibt deren Substitution in die Minimumsgleichung:

$$\left[\frac{r}{m^2} d\varphi^2 \right] = \text{Minimum.}$$

Man erhält nun aber durch eine leicht auszuführende Differentiation von $\tan \varphi = \frac{y' - y}{x' - x}$ bez. $\frac{x' - x}{y' - y}$ sofort die nachstehenden Ausdrücke für $d\varphi$:

¹⁾ Die Grösse x ist im bayerischen Netze II. Ordnung durchschnittlich gleich 20000 zu schätzen, woraus der mittlere Fehler einer Richtungsableitung bei einer Entfernung $= 3,5 \text{ K}^m$ sich zu $6''$ ergibt.

1) Wenn die Richtungen von der Abscissenachse aus zählen:

$$d\varphi = \frac{\sin \varphi}{r} dx - \frac{\cos \varphi}{r} dy \quad \dots \quad (12)$$

2) Für eine Zählung von der Ordinatenachse aus:

$$d\varphi = \frac{\sin \varphi}{r} dy - \frac{\cos \varphi}{r} dx \quad \dots \quad (13)$$

Der Versuch, die Ausdrücke (12), bez. (13) in die obige Minimumsgleichung einzuführen, würde für den hier zu erreichenden Zweck immer noch zu complicirte Formeln liefern. Bedenken wir aber, wie alle Ausgleichungen und selbst die strenge, nichts weiter als mehr oder minder weit gehende Annäherungen an die uns immer unbekannt bleibende Wahrheit sind, so gelangen wir zu einer höchst einfachen und eine rein mechanische Anwendung gestattenden Methode, wenn wir die Ausgleichung für x und y gesondert führen. Das heist im Grund genommen weiter nichts als: Wir betrachten die Abscissen und Ordinaten als von einander unabhängig bestimmt, zerreißen also durch die gesonderte Ausgleichung ihren Zusammenhang. Wenn das freilich kein strenger Weg mehr ist, so ist er doch durch die Umstände geboten und zudem ruht trotz alledem die ganze Ausgleichung noch auf so sicheren, den thatsächlichen Verhältnissen weit mehr als die bisherigen Annahmen Rechnung tragenden Grundlagen, dass diese Vernachlässigung, wie auch die praktische Erfahrung zeigt, keinen nennenswerthen Einfluss mehr zu üben vermag.

In Berücksichtigung dessen und unter Benützung von (12) erhält man jetzt zwei Minimumausgleichungen, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{r}{m^2} d\varphi_x^2 \right] &= \text{Min.} \\ \left[\frac{r}{m^2} d\varphi_y^2 \right] &= \text{Min.} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (14)$$

Da aber $d\varphi_x^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} (x' - x)^2$ und $d\varphi_y^2 = \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} (y' - y)^2$

so hat man auch für (14):

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{m^2 r} (x' - x)^2 \right] &= \left[S (x' - x)^2 \right] = \text{Min.} \\ \left[\frac{\cos^2 \varphi}{m^2 r} (y' - y)^2 \right] &= \left[C (y' - y)^2 \right] = \text{Min.} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (15)$$

hierbei gleichzeitig

$$S = \frac{\sin^2 \varphi}{r} \text{ und } C = \frac{\cos^2 \varphi}{r}$$

setzend, da die m^2 , als alle einander gleich, ¹⁾ ohnehin ausfallen.

Trennen wir jetzt die weitere Untersuchung für die „pothenot'sche“ und „trianguläre“ Bestimmung.

Aus (15) folgt zunächst:

$S' (x' - x)^2 + S'' (x'' - x)^2 + S''' (x''' - x)^2 + \dots = \text{Min.}$
und daraus der bekannten Bedingung des Minimums zufolge:

$S' (x' - x) + S'' (x'' - x) + S''' (x''' - x) + \dots = 0$
oder die Unbekannte

$$x = \frac{S' x' + S'' x'' + S''' x''' + \text{etc.}}{S' + S'' + S''' + \text{etc.}} = \frac{[S x]}{[S]} \dots (16)$$

In ganz ähnlicher Weise erhalten wir für die Ordinate

$$y = \frac{C' y' + C'' y'' + C''' y''' + \text{etc.}}{C' + C'' + C''' + \text{etc.}} = \frac{[C y]}{[C]} \dots (17).$$

Nach dem Vorhergehenden ist die Ausgleichung für Dreiecksverbindungen leicht zu erledigen. Wir dürfen dabei nur bedenken, dass wir für jedes Dreieck hier zwei $d\varphi$ erhalten und dass den einzelnen Punkten verschiedene Genauigkeiten zukommen können, je nach der Form des Dreiecks und nach dem Umstande, ob in ihm nur 2 oder alle 3 Winkel gemessen sind.

Es ist nun einleuchtend, dass die Genauigkeit einer Punktbestimmung neben anderen bedingenden Momenten wesentlich von der Grösse des Schnittwinkels (γ) abhängig ist; sie, oder was dasselbe ist, ihr Gewicht lässt sich also durch eine mit γ gleichzeitig zu- oder abnehmende Funktion, hier also durch

$$\sin \gamma, \text{ resp. } \sin^2 \gamma$$

ausdrücken. In gleicher Weise können wir in zwei Dreiecken, in welchen der Schnittwinkel γ einmal gemessen ist, das andere mal nicht, das Verhältniss der Gewichte dieser letzteren wie

$$2 \text{ zu } 1$$

setzen. ²⁾

Dies beachtend und der grösseren Ordnung halber immer die von der Grundlinie aus links liegenden Seiten resp. deren Richtungen mit niedrigeren Indices bezeichnend, haben wir analog dem Früheren, dabei

¹⁾ Gleiche Wiederholungszahlen vorausgesetzt.

²⁾ Man führt dann für $(x' - x)^2$ den Ausdruck $\left(\frac{x' - x}{\frac{I}{\sin \gamma}} \right)^2$, bez. $\left(\frac{x' - x}{\frac{I}{\sin \gamma \sqrt{2}}} \right)^2$

ein, wie aus bekannten Sätzen leicht erhellt.

$$\text{und } \begin{matrix} (S + S') \sin^2 \gamma, \text{ bez. } 2 (S + S') \sin^2 \gamma = q \\ (C + C') \sin^2 \gamma, \text{ bez. } 2 (C + C') \sin^2 \gamma = p \end{matrix} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (18)$$

setzend,

$$[q \cdot (x' - x)^2] = \text{Min.}$$

$$[p \cdot (y' - y)^2] = \text{Min.},$$

woraus wie vorher

$$x = \frac{[q \cdot x]}{[q]} \text{ und } y = \frac{[p \cdot y]}{[p]} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (19)$$

folgt.

Die hier entwickelte Ausgleichung würde nicht auf den Vorzug eines einfach und schematisch anzuwendenden Verfahrens Anspruch machen können, wenn wir genöthigt wären, sämtliche Grössen aus welchen sich unsere Gewichte zusammensetzen, numerisch zu rechnen. Diese Nothwendigkeit liegt aber keineswegs vor; vielmehr habe ich es vorgezogen, die Werthe

$$\frac{\sin^2 \varphi}{r} = S \text{ und } \frac{\cos^2 \varphi}{r} = C$$

ebenfalls in Tafeln zu bringen und dann graphisch zu interpoliren. Der Werth von $\sin^2 \gamma$, bez. $2 \sin^2 \gamma$ ist in diesen Tafeln implicite enthalten. Diese letzteren haben nun folgende, den früher beschriebenen Tafeln ähnliche Einrichtung.

In der Abscissenachse sind die Direktionswinkel in Abständen zu 2° von 0° bis 90° , (resp. in vier Reihen die von $0-360^\circ$) aufgetragen, während die Entfernungen in ihren Logarithmen als Curven gegeben sind. Der kleinste Entfernungs-Logarithmus ist 2,50, der grösste 3,50; innerhalb dieser Grenzen schreiten dieselben in verschiedenen Intervallen, die von 0,01 bis 0,1 gehen, fort.

Entnimmt man nach den unten eingeschriebenen Richtungswinkeln die S, so gibt eine am oberen Theile der Tafel in entgegengesetzter Reihenfolge vorgenommene ähnliche Bezifferung sofort die C für die Ordinate.¹⁾ Dabei sind behufs Erzielung ganzer, aber doch auch wieder nicht zu grosser Zahlenwerthe, sämtliche quadratische Grössen mit einer Zahl deren Logarithmus 5,200 ist, multiplicirt. Das $\sin^2 \gamma$ ergibt sich gleichzeitig aus der Tafel unter der Annahme eines konstanten r; beispielsweise $\log r = 2,50$. —

Die Anwendung der hier beschriebenen Tafel wie überhaupt der ganzen Ausgleichung ist so einfach und gewissermassen rein mechanisch, dass die letztere in dieser Beziehung wol mit allen anderen ähnlichen Verfahrensweisen, wenn man das einfache

¹⁾ Im bayerischen Netz vertauscht sich S mit C, dieses wieder mit jenem.

arithmetische Mittel und die Methode der Schätzung ausschliesst, konkurrieren kann. Wesentlich allerdings und nicht wenig zur Sicherheit und raschen Förderung der Arbeit beiträgend, ist dabei die Anwendung eines passenden Rechnungs-Formulars, in welchem jeder Grösse schon von vornherein ein bestimmter Platz zugewiesen ist. Beim kgl. bayer. Kataster-Büreau sind solche Formulare in Gebrauch, welche die gesammte Rechnung und Ausgleichung für eine pothenot'sche Bestimmung mit 6 Zielpunkten, bez. eine trianguläre mit 6 Dreiecken auf einer Seite zu führen gestatten. Es ist dabei, behufs Erhaltung einer grösseren Ordnung, folgender Gang der Arbeiten zu Grunde gelegt.

I. Pothenot'sche Bestimmung.

- 1) Ermittlung eines scharf zu rechnenden genäherten Orts aus den 3 Punkten günstigster Kombination;
- 2) Berechnung der Direktionswinkel und Entfernungen vom gefundenen Ort nach allen eingeschnittenen Punkten;
- 3) Bestimmung der λ aus den Ausdrücken $(\varphi_1 + \alpha_n) - \varphi_n = \lambda_n$;
- 4) Ermittlung des ζ aus (3);
- 5) Aufstellung der v in (2);
- 6) Entnahme der S und C aus der graphischen Hilfstafel;
- 7) Desgleichen der Δ aus dem Diagramm;
- 8) Auftragen der Richtungen wie der Δ im Quadratnetz;
- 9) Ablesung der dx und dy in diesem letzteren, und
- 10) Bestimmung des mittleren Ortes aus den Gl. (16) u. (17).

II. Dreiecks-Bestimmung.

- 1) Erfüllung der Winkelbedingungen unter Berücksichtigung der Gl. (7) oder (9);
- 2) Berechnung der Dreiecksseiten;
- 3) Bestimmung der Coordinaten des gesuchten Punktes aus einem Dreieck (mit Kontrolle);
- 4) Entnahme der S und C aus der Hilfstafel;
- 5) Herstellung der Gewichte q und p nach (18);
- 6) Konstruktion der einzelnen Oerter nach den logarithmischen Seitendifferenzen und den Stationswinkeln im Quadratschema;
- 7) Ablesung der dx und dy aus dem letzteren, und
- 8) Berechnung der mittleren Coordinatenwerthe nach den Gl. (19). —

Der im Obigen festgehaltene Gang der Arbeiten in Verbin-

dung mit den vorgeschlagenen Hilfsmitteln wird es nicht länger zweifelhaft erscheinen lassen, dass die Methode im Grunde genommen eine der einfachsten ist und die leichteste Anwendung gestattet. Zugleich wird aber nicht zu verkennen sein, wie dieselbe sämtliche der Eingangs dieses Artikels aufgestellten Forderungen erfüllt. Das Hauptgewicht lege ich dabei auf den Umstand, dass für die vorzunehmende Ausgleichung eine feste Norm geschaffen ist, die für jeden beliebig gestalteten Fall in gleicher Weise zur Anwendung gelangen kann. In der That ist auch für die hier besprochenen elementar-geodätischen Arbeiten, ebenso wie in den höheren Theilen unserer Wissenschaft, der Ausschluss des individuellen Meinens und Könnens eine der unerlässlichsten Forderungen und jede Methode wird auf Beachtung Anspruch erheben können, welche diese Bedingung unter gleichzeitiger Berücksichtigung aller übrigen massgebenden Verhältnisse und insbesondere der des mathematischen Zusammenhanges erfüllt.

Zusatz I:

Hinsichtlich der auf S. 16 gemachten Anmerkung ist nach Darstellung der angenäherten Ausgleichungsmethode noch Folgendes zu bemerken.

Sobald es sich um die Festlegung von Ausgangspunkten einer auszuführenden Lokal-Triangulation oder grösseren Einschaltung handelt, ist es geboten, diese Punkte sowol möglichst gut unter sich als gleichzeitig auch mit dem System der Landestriangulation in Verbindung zu bringen. Der im II. Art. empfohlene Weg der succesiven Einschaltung kann unter Umständen nicht für genügend erachtet werden, während doch wiederum eine strenge Ausgleichung selbst bei einem Netz von nur 4—6 Hauptpunkten mit eingeschnittenen Diagonalen zu langwierig und auch in Hinblick auf die früher geschilderten Netzverhältnisse nicht angemessen erscheint.

Ein leichtes und doch zu vortrefflichen Resultaten führendes Verfahren ist im Nachstehenden geschildert.

Die betreffenden Hauptpunkte (im folgenden Beispiel 4) werden jeder in der besprochenen Weise gegen möglichst viele und günstig situirte Punkte des Dreiecksnetzes festgelegt. Sie sind dadurch nicht direkt, doch immerhin mittelbar verbunden, insofern ein geschickter Geodät die zu benützenden Objekte des Hauptnetzes hinsichtlich des zu erreichenden Zweckes mit Sorgfalt auswählen wird. Behufs der herzustellenden direkten Verbindung,

die aber gleichzeitig die relativen Lagen unserer Ausgangspunkte gegen das Hauptsystem nur in geringem Masse verändern darf, werden aus den gefundenen und wie man sieht schon möglichst genäherten Orten die Direktionswinkel sämtlicher Seiten sowie aller eingeschnittenen Diagonalen gerechnet und mit den Beobachtungen verglichen. Eine der früheren analoge Behandlungsweise führt zur Aufstellung folgender Richtungs-Korrekturen:

Station 1: Station 2: Station 3: Station 4:
 $v_2', v_3', v_4';$ $v_1'', v_3'', v_4'';$ $v_1''', v_2''', v_4''';$ $v_1''', v_2''', v_3''''.$

Die Verbesserungen ein und derselben Richtung auf den beiden Endpunkten widersprechen einander; es liegt nahe, das arithmetische Mittel aus beiden als die verlangte Richtungsänderung anzunehmen, sofern die Winkel auf den bez. Endpunkten und diese letzteren selbst gleich genau bestimmt sind. Da aber die Änderung der Richtung auf einem der Punkte schon eine gleiche Änderung auf den anderen einschliesst, jedenfalls aber beide Punkte und nicht nur der eine eine Korrektur erleiden sollen, so wird diese auf jedem der zwei Punkte und zwar mit gleichem Betrage vorzunehmen sein.

Man findet darnach für die einzelnen Richtungen auf jeder Station folgende Verbesserungen:

Station 1: Station 2:
 $\frac{v_2' + v_1''}{4}, \frac{v_3' + v_1'''}{4}, \frac{v_4' + v_1''''}{4};$ $\frac{v_1'' + v_2'}{4}, \frac{v_3'' + v_2'''}{4}, \frac{v_4'' + v_2''''}{4}$
 Station 3: Station 4:
 $\frac{v_1''' + v_3'}{4}, \frac{v_2''' + v_3''}{4}, \frac{v_4''' + v_3''''}{4};$ $\frac{v_1'''' + v_4'}{4}, \frac{v_2'''' + v_4''}{4}, \frac{v_3'''' + v_4'''}{4}.$

Die weitere Behandlungsweise ist nun ganz die frühere und es braucht wol kaum bemerkt zu werden, wie sich die Bestimmung der linearen Ortsverschiebungen sowie der Koeffizienten S und C auf die Hälfte der oben aufgestellten Korrektionsglieder, also für ein Viereck mit 2 Diagonalen auf 6, reducirt.

Die hier dargestellte Ausgleichungs-Operation ist für ein Polygon von 4—6 Punkten mit eingeschnittenen Diagonalen unter Benützung der graphischen Hilfstafeln in höchstens 2 Stunden vollzogen, erheischt also einen kaum nennenswerthen Zeitaufwand. Trotzdem möchte sie einer succesiven Einschaltung solcher Ausgangspunkte vielfach vorzuziehen sein, indem sie, alle Punkte gleichzeitig zusammenfassend, sowol die möglichst direkte Verbindung derselben unter sich als auch mit dem System des gegebenen Dreiecksnetzes bewirkt.

Zusatz II:

Es ist nicht ohne Interesse, die Zusammensetzung des durch die Formel

$$\delta = \frac{\sqrt{\frac{k}{r} + k_1}}{\sqrt{n}}$$

ausgedrückten mittleren Fehlers einer Richtung, (von der Azimuthableitung abgesehen), näher zu betrachten.

Zunächst ist einleuchtend, dass nach Elimination aller Instrumentalfehler u. dergl., δ blos von den Visur- und Ablesungsfehlern abhängig sein wird und dass diese letzteren im Allgemeinen einen nur zufälligen Charakter haben werden.

Beide Fehler lassen noch eine weitere Zerlegung zu; der erstere in den Fehler des Einstellens überhaupt, abhängig von der optischen Kraft des Fernrohrs, und in einem von der Beschaffenheit unserer Signalisirungsobjekte sowie den Beleuchtungs- und Temperaturverhältnissen abhängigen Fehler. Der zweite setzt sich aus den eigentlichen Ablesungs- und den Theilungsfehlern zusammen.

Die letzteren lassen sich, soweit sie regelmässige oder periodische sind, durch geeignete Vorkehrungen fast ganz eliminiren, die unregelmässigen aber zum grössten Theile wenigstens in enge Grenzen einschliessen. Besonders wird bei kleineren Instrumenten mit geringer Nonienangabe bei der heute auch für kleine Kreise anzutreffenden verhältnissmässig scharfen Theilung der eigentliche Ablesungsfehler stets überwiegen. Dieser wird nun durch wiederholte Beobachtungen seinem absoluten Werthe nach verkleinert werden können, obwol sich sein relativer Einfluss dadurch nicht ändert. Jedenfalls ist aber klar, dass er nur vom Instrument, bez. vom Beobachter, keinesfalls jedoch von der Entfernung und von der Beschaffenheit der Signalisirungsobjekte abhängig ist.

Ganz anders stellt sich das Verhältniss für den Visurfehler. Die Unmöglichkeit, auf kurze Entfernungen das eigentliche Centrum des im Fernrohre oft den Fadenabstand um das 2—4fache überschreitenden Objectes genau zu schätzen, bewirkt eine mit abnehmender Entfernung zunehmende Unsicherheit des Einstellens; wir wollen diesen Theil des Visurfehlers durch $\pm \frac{\mu_1}{r}$ darstellen. Seinem Einfluss wird aber theilweise entgegengewirkt durch die mit zunehmender Entfernung ebenfalls, wenn auch in

schwächerem Masse wachsende Undeutlichkeit der Bilder und besonders der Schwierigkeit des Einstellens bei undulirender Luft. Da nun diese Ursachen, auch die letztgenannte, immer, wenn auch in sehr verschiedenen Graden, des Einflusses wirksam bleiben, so kann auch der zweite Theil des Visurfehlers durch eine Funktion von r , nämlich durch $\pm \frac{\mu_2 r^2}{r} = \pm \mu_2 r$ ausgedrückt werden. Die hier gewählte Form ergibt sich daraus, dass im Allgemeinen die durch das Zittern der Bilder u. dergl. bewirkte Unsicherheit des Einstellens bei gleichbleibender Luftbeschaffenheit im quadratischen Verhältniss der Entfernungen steht, der entstehende Richtungsfehler also den Distanzen einfach proportional sein wird.

Endlich tritt zu diesen beiden Fehlertheilen noch ein durch Phasenbeleuchtung bedingter. Insofern als Winkel auf verschiedenen Standpunkten oder nur zu verschiedenen Zeiten gemessen werden, haben diese letzteren Fehler in ihrem relativen Verhältniss den Charakter des zufälligen, und nur in dieser Hinsicht sind sie als Beobachtungsfehler zu betrachten; ihr Ausdruck ist durch $\pm \frac{\mu_3 r}{r} = \pm \mu_3$ gegeben.

Durch das Zusammenfassen aller der ebengenannten partiellen Fehler entsteht der eigentliche Visurfehler

$$m = \sqrt{\frac{\mu_1^2}{r^2} + \mu_2^2 r^2 + \mu_3^2}.$$

Sein numerischer Werth in einzelnen Fällen kann je nach dem grösseren oder geringeren Ueberwiegen der einzelnen Glieder äusserst verschieden sein; in der Regel hat aber μ_1 gegenüber den anderen den grössten absoluten Werth, was in den für elementar-trigonometrische Messungen durchschnittlich anzunehmenden Signalisierungsverhältnissen begründet ist.

Die Erfahrung zeigt nun weiter, dass das Zusammenwirken der im obigen Wurzelausdrucke vorkommenden Glieder den Visurfehler annähernd zu einer Funktion der Quadratwurzel der Entfernung macht, so dass man setzen kann:

$$m = \pm \frac{k}{\sqrt{r}}$$

Da sich nun der gesammte Richtungsfehler aus dem Visur- und den eigentlichen Ablesungsfehler $\left(\pm k_1 \right)$ zusammensetzt, so hat man

$$\delta = \sqrt{m^2 + k_1^2} = \sqrt{\frac{k^2}{r} + k_1^2},$$

woraus sich der mittlere Winkelfehler für die einmalige Messung zu

$$\pm \sqrt{k^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) + 2 k_1^2},$$

der für die n malige Wiederholung gleich

$$\pm \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{k^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) + 2 k_1^2}$$

ergibt.

Dieser Ausdruck lehrt Folgendes:

- 1) Der mittlere Fehler eines Winkels ist nicht bloß eine Funktion der Wiederholungszahl n der Messungen, sondern auch (umgekehrt) der Längen der Winkelschenkel.
- 2) Je schärfer die Einstellung, bez. je exakter die Signalisungsverhältnisse gegenüber der Ablesung, desto mehr wird der zu befürchtende Fehler von der Entfernung unabhängig.
- 3) Da für die elementar-trigonometrischen Einschaltungen gewöhnlich Instrumente zur Anwendung kommen, die eine verhältnissmässig scharfe Ablesung (5—10'') gestatten, zugleich aber die Signalisungsverhältnisse in der Regel viel zu wünschen übrig lassen, so wird hier der Visurfehler, besonders auch in Anbetracht der kurzen Entfernungen, fast immer überwiegen und so den mittleren Fehler zu einer (reciproken) Funktion der Entfernung machen.
- 4) Die aus den Beobachtungen mit einem ziemlichen Grade von Sicherheit abzuleitenden Werthe von k und k_1 werden für die in unseren Arbeiten vorauszusetzenden Verhältnisse immer zu dem Ergebnisse führen, dass für nicht zu grosse Entfernungs-Differenzen (Maximum 1:20) die Genauigkeit unserer Richtungsangaben annähernd im direkten Verhältnisse zu den Quadratwurzeln der Längen steht.

IV.

Die Coordinaten-Verbesserung im Polygonnetz.

Lässt sich die Ausgleichung in elementaren Dreiecksnetzen trotz der dabei obwaltenden Hindernisse immer noch vielfach auf

theoretische Grundlagen stützen und dadurch ein diesen letzteren wie auch den praktischen Erfahrungen möglichst entsprechendes Resultat erreichen, so ist man dagegen für die Coordinaten-Verbesserung im Polygonnetz genöthigt, sich rein auf empirischen Boden zu stellen und nur mit allgemeinen Annahmen zu rechnen.

Von einer Anwendung der strengen Ausgleichungsmethode muss man, abgesehen vom Kostenpunkt, schon um desswillen absehen, weil sofort die Unmöglichkeit eintritt, das gegenseitige Genauigkeitsverhältniss von Längen- und Winkelmessung in exakter Weise zu bestimmen. Wol sind in dieser Hinsicht neuerdings Versuche gemacht worden dieses Hinderniss zu umgehen, jedoch waren dieselben, meiner Ansicht nach, von keinem günstigen Erfolge begleitet und lassen gegentheilige Ansichten zu Recht bestehen.

Es braucht wol kaum bemerkt zu werden, dass für eine genaue Bestimmung des gesuchten Genauigkeitsverhältnisses es keinesfalls genügt, zu sagen: Bei Lattenmessung ist der mittlere Fehler der Längen-Einheit $\pm m$, der des mit einem bestimmten Instrument gemessenen Winkels $\pm v$, da ja auf den faktisch sich zeigenden Fehler noch ganz andere Fehlerursachen bestimmend einwirken.

Ich erinnere hier, ganz abgesehen von den Kontroversen, welche über das Anwachsen des Längenfehlers mit der Länge der Linie stattfinden und die heute noch nicht behoben sind, nur an die relative Unsicherheit der Anfangs- und Endpunkte der Polygonzüge, ferner an die (bei den kurzen Entfernungen) sehr stark wirkenden Einstellungs- und Aufstellungsfehler, an die Neigungsverschiedenheiten der Strecken und der dadurch bewirkten Aenderung in den Genauigkeitsverhältnissen der Längenmessung u. s. w. Das Alles ist von so bestimmenden Einfluss auf die schliesslich sich zeigende Abweichung, dass von keiner mathematisch strengen Ausgleichung hier die Rede sein kann.

Bis jetzt sind es nun hauptsächlich drei Methoden, welche in der Praxis Anwendung gefunden haben: Die gleichheitliche Vertheilung des Fehlers (sowol des in der Abscisse, wie des in der Ordinate liegenden) auf alle Punkte, die Vertheilung nach den absoluten Abscissen- und Ordinaten-Unterschieden und endlich die nach den Streckenlängen.

Die erste, obwol einfachste, dürfte durchaus zu verwerfen sein, da sie keinerlei Rücksicht auf die obwaltenden Umstände

nimmt. Die zweite ist entschieden die bessere, wenn dabei, was ja ohnehin in allen Instruktionen vorgeschrieben ist, der Polygonzug möglichst gestreckt ist und erhebliche Unterschiede in den Streckenlängen vermieden sind. Die dritte Methode möchte der eben besprochenen nachstehen, da jedenfalls die Neigung des Zuges gegen die Coordinatenachsen auf die sich ergebenden Coordinaten-Differenzen Einfluss hat.

Ich selbst habe mich bisher immer der zweiten Verfahrungsweise bedient, bis die Ergebnisse umfangreicher Polygonmessungen neuerer Zeit mich auf einen anderen Gedankengang führten.

Bei der von mir geleiteten trigonometrischen Neuaufnahme des Nürnberger Stadtbezirks zeigte sich nämlich die auffällige Erscheinung, dass während die Winkelmessungen in allen Polygonzügen mit vorzüglicher Genauigkeit stimmten, in den Coordinaten doch erhebliche Differenzen zum Vorschein kamen. Man konnte zuerst meinen, dass diese ihren Grund in der relativen Unsicherheit der Ausgangspunkte im Dreiecksnetz hätten; diese Erklärung ward aber hinfällig, wenn man Zeichen und Grösse der Differenzen betrachtete. Diese ergaben das merkwürdige Resultat, dass alle Linien, ohne Ausnahme, zu kurz gemessen waren, während doch das Gegentheil wahrscheinlicher gewesen wäre. Ich muss dabei bemerken, dass sämtliche Strecken doppelt gemessen sind, dabei die Längendifferenzen sich immer in Linien ($\frac{1}{1000}$ R.) bewegten und bloß einigemal Zolle ergaben. Somit konnte die Ursache nur in der Unrichtigkeit des Längenmasses, der von Ertel u. Sohn in München gelieferten 15 b. Fuss langen Latten liegen. Eine vorläufige Untersuchung derselben, da eine genaue wegen Abgangs eines noch zu liefernden Normalmeters zur Zeit nicht ausführbar war, hat allerdings eine etwas zu grosse Länge, indess nicht in dem erwarteten Masse, ergeben. Es bleibt demnach nur die Annahme übrig, dass der unseren Latten zu Grunde gelegte bayerische Fuss nicht mit den dem bayerischen Dreiecksnetze als Grundmass dienenden Fuss übereinstimmt und sich sonach der beobachtete konstante Fehler ergeben musste.

Es ist einleuchtend, dass diese oder ähnliche Verhältnisse auch anderwärts vorkommen können, um so mehr, da gewöhnlich und allerdings ganz ungerechtfertigter Weise, bei der Herstellung derartiger Messlatten eine weite Fehlergrenze gestattet wird und viele Geometer diesem höchst wichtigen Punkte eine nur geringe Beachtung schenken. Die Wirkung einer Abweichung des Längenmasses kann aber dann keine andere sein als die, die zufälligen

Messungsfehler mehr oder minder gegen die konstanten Fehler verschwinden zu lassen.

Ein Aehnliches kann auch bei der Winkelmessung vorkommen. Bei der oben erwähnten Arbeit zeigte es sich nämlich, dass die Einführung der Azimuth- (Direktions-) Winkelableitung in Quer-Polygonzügen, d. h. solchen, welche andere einander nahezu parallel laufende Züge verbanden, verhältnissmässig grössere Differenzen zeigten. Die Ursache dafür lässt sich nur in relativen Ortsverschiebungen der Ausgangs- bez. Endpunkte solcher Querzüge finden, die natürlich um so wirksamer auftreten je kürzer der Zug ist.

Mit dem Obigen ist nun weiter nichts gesagt, als dass in unseren polygonometrischen Arbeiten Fehlerquellen wirksam sein können, welche gerade die systematischen Fehler in den Vordergrund treten lassen und so die faktischen Längen- oder Richtungsabweichungen in einem Zuge beziehungsweise sich mit gleichen Zeichen, dabei aber, je nach Länge und Richtung, mit verschiedenen numerischen Werthen ergeben. Verhält sich dies wirklich so, wenn auch vielleicht nur in einem grösseren oder minderen Grade der Annäherung, so muss der Gedanke nahe liegen, ob man nicht aus dem Verhältnisse der Koordinatendifferenzen eine Beziehung dafür ableiten könne, in welcher Weise die Längen-, in welcher die Richtungsabweichung bei Bildung derselben massgebend gewesen sei. Selbstverständlich kann es sich dabei nur um ungefähre Verhältnisse handeln und zugleich wird die Voraussetzung gemacht, die man ja ohnehin immer zu erfüllen sucht, dass der Zug ein möglichst gestreckter sei.

Man findet aus den Coordinatenformeln durch Differentiation

$$\left. \begin{aligned} dx' &= \cos \alpha' \cdot dr - r' \sin \alpha' d\alpha' \\ dy' &= \sin \alpha' \cdot dr + r' \cos \alpha' d\alpha' \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (1)$$

wo dr die Aenderung der Länge, $d\alpha$ die des Direktionswinkels bedeutet. Der obigen Erörterung zufolge kann man setzen:

$$dr = r \cdot \varepsilon \text{ und } \frac{d\alpha}{206265} = n \cdot \varepsilon \cdot \cdot \cdot (2)$$

in welchen Ausdrücken sowohl ε als n beliebig positiv oder negativ sein können, ε aber unter allen Umständen eine kleine Grösse ist, nämlich der Fehler der Masseinheit, verstärkt oder vermindert durch die relativen Verschiebungen des Anfangs- und Endpunktes des Zuges.

Substituieren wir die (2) in (1), so folgt:

$$\begin{cases} dx' = r' \cos \alpha' \cdot \varepsilon - r' \sin \alpha' n \cdot \varepsilon = (x' - y' \cdot n) \cdot \varepsilon \\ dy' = r' \sin \alpha' \cdot \varepsilon + r' \cos \alpha' n \cdot \varepsilon = (y' + x' \cdot n) \cdot \varepsilon \end{cases} \quad (3)$$

und diese Ausdrücke gelten für jeden Punkt des betreffenden Polygon-Zuges.

Die Addition derselben muss, mit grösserer oder geringerer Annäherung, selbstverständlich die ganzen Coordinatendifferenzen dx und dy ergeben, also

$$dx = [x - y \cdot n] \varepsilon$$

$$dy = [y + x \cdot n] \varepsilon$$

woraus durch Division

$$\frac{dx}{dy} = \frac{[x] - [y] \cdot n}{[y] + [x] \cdot n}$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach n ergibt sofort:

$$n = \frac{dy [x] - dx [y]}{dx [x] + dy [y]} \quad (4)$$

Je grösser n , desto grösser die (positive oder negative) Richtungsablenkung und umgekehrt. Für $n=0$ ist hauptsächlich der Längenfehler massgebend gewesen. Der Fall, wo der Zähler des Bruches für n der Null gleich, also n unendlich wird, kann dahin interpretirt werden, dass der Längenfehler gegen den der Richtungsableitung verschwindet.

Ist somit n gefunden, so werden nach Substitution desselben in (3) die Abscissendifferenzen proportional $(x - y \cdot n)$, die der Ordinaten proportional $(y + x \cdot n)$ vertheilt, womit die Aufgabe gelöst ist.

Wie man sieht, beruht diese Korrektionsmethode auf der Annahme, dass die zufälligen Messungsfehler gegen die systematischen oder regelmässigen nahezu verschwinden. Wenn das selbstverständlich auch nicht vollständig zutreffend ist, so wird es doch um so mehr der Fall sein, mit je grösserer Sorgfalt die Messungen ausgeführt, bez. die zufälligen Fehler durch die Messungs- oder Beobachtungsmethode eliminirt wurden. Sonach ist die hier dargelegte Methode besonders für strengere Messungen anwendbar, und wenn sie auch, was ganz unmöglich ist, nicht die volle Wahrheit gibt, so ist doch jedenfalls dem Grundgedanken, aus Grösse und Vorzeichen der Coordinatenabweichungen den grösseren oder geringeren Einfluss des Längen- oder Richtungsfehlers abzuleiten, eine logische Begründung nicht abzusprechen.

Einige Beispiele mögen das Vorige erläutern.

Es sei zuerst

$$dx = dy \text{ und } [x] = [y]$$

so gibt die Gl. (4)

$$n = 0$$

wie ganz selbstverständlich, da der abweichende Endpunkt in der Richtung des Zuges liegt und bei beziehungsweise gleichen oder ungleichen Vorzeichen der Differenz und des Coordinaten-Unterschiedes die Strecken zu lang, resp. zu kurz gemessen sind. Die Korrekturen erfolgen dann proportional den x , resp. den y .

Sind unter Beibehaltung der vorigen Annahmen die Zeichen der x oder aber die Zeichen der y verschieden, so ergibt sich

$$n = \infty,$$

d. h. der Längenfehler verschwindet gegen den Richtungsfehler und die Abscissen und Ordinaten korrigiren sich nach y , resp. x .

Seien endlich alle Grössen positiv oder negativ, und dabei $dx = dy$, aber

$$[x] = 10 [y],$$

so findet man:

$$n = 0,82,$$

und hätten die Differenzen das entgegengesetzte Vorzeichen von den Coordinatenunterschieden,

$$n = -0,82.$$

Eine erhebliche Mehrarbeit gegen das jetzige Verfahren ist auf alle Fälle nicht vorhanden, denn alle in die Gleichungen (3) und (4) eintretenden Grössen sind ohnehin schon vorhanden und die Ermittlung des n wie seine nachherige Substitution ist in wenig Minuten ausgeführt, wenn man, was ja vollständig genügt, die Coordinaten-Unterschiede in Einheiten von 10^m abrundet. —

Für eine Zählungsweise wie im bayerischen Netz würden sich die genannten Gleichungen umformen in

$$dx' = (x' + y' \cdot n) \varepsilon$$

$$dy' = (y' - x' \cdot n) \varepsilon$$

und

$$n = \frac{dx [y] - dy [x]}{dx [x] + dy [y]}$$

während die weitere Anwendung dieselbe bleibt.

Zur näheren Begründung will ich noch einige, der mehrerwähnten Nürnberger Aufnahme entnommene Beispiele hier anführen.

Es war in einem Zuge gefunden worden:

$$1) \quad dx = -0,051, \quad dy = -0,056 \quad \text{und} \quad [x] = -130, \quad [y] = -170,$$

(letztere auf Zehner-Ruthen abgerundet), woraus die letztangeführte Gleichung ergibt:

$$n = + 0,09$$

Weitere Beispiele ergeben Folgendes:

$$2) \quad dx = + 0,035, \quad dy = - 0,028 \quad \text{und} \quad [x] = + 70, \quad [y] = - 60.$$

$$n = - 0,03.$$

$$3) \quad - 0,046, \quad - 0,143 \quad \text{und} \quad - 240, \quad - 420$$

$$n = - 0,21.$$

$$4) \quad + 0,053, \quad - 0,020 \quad \text{und} \quad + 110, \quad - 40$$

$$n = + 0,01.$$

$$5) \quad + 0,023, \quad - 0,021 \quad \text{und} \quad + 70, \quad - 80$$

$$n = - 0,11.$$

$$6) \quad + 0,034, \quad - 0,037 \quad \text{und} \quad + 100, \quad - 110$$

$$n = - 0,01.$$

Diese Beispiele, denen ich noch eine grosse Anzahl ähnlicher beifügen könnte, zeigen zur Evidenz, dass hier der systematische Längenfehler von überwiegendem Einfluss auf die schliesslichen Coordinatendifferenzen gewesen ist, so dass dagegen die Winkelmessung mit dem Theodolit fast als absolut genau zu betrachten war. Es ergibt sich aber auch daraus, wie sehr die oben gemachten Annahmen, und nicht blos in den vorliegenden, sondern in allen anderen derartigen Arbeiten, wo ganz ähnliche Verhältnisse obwalten können, faktisch begründet sind und so die vorgeschlagene Methode die Beachtung der praktischen Geometer verdient. Jedenfalls ist es aber von Wichtigkeit zu sehen, wie mindestens das Verfahren geeignet ist, die vermuthete Existenz konstanter Fehlerquellen in exakter Weise zu konstatiren und wir so in den Stand gesetzt sind, sowol die auftretenden Fehler in wirklich angemessener Weise zu vertheilen als auch einen sicheren Massstab für die Beurtheilung der Präcision dieser trigonometrischen Messungen zu gewinnen.

Hiervon noch ein Beispiel zu geben, will ich die Resultate einiger der oben erwähnten Querszüge, welche ziemlich parallel laufende Hauptpolygonzüge auf kurze Distanzen verbanden, nachträglich mittheilen.

Der erste Zug hatte folgende Daten gegeben:

$$1) \quad dx = + 0,030, \quad dy = + 0,031 \quad \text{und} \quad [x] = - 90, \quad [y] = + 20,$$

woraus

$$n = - 1,63.$$

Aus weiteren Zügen gibt sich das n folgendermassen:

- 2) $- 0,080,$ $- 0,021$ und $- 60,$ $- 280$
 $n = + 1,98.$
- 3) $+ 0,019,$ $+ 0,015$ und $- 60,$ $+ 30$
 $n = - 2,13.$
- 4) $+ 0,009,$ $+ 0,059$ und $- 120,$ $+ 100$
 $n = + 1,65.$

Diese Beispiele liessen sich noch beliebig vermehren, aber schon die gegebenen zeigen zur Genüge, wie sicher die a priori vermuthete Richtungsablenkung sich konstatirt. Man muss dabei bedenken, wie der Fehler einer ersten Azimuthableitung nicht nur auf das Azimuth der ersten Seite nachtheilig einwirkt, sondern den ganzen Zug verdreht. Es muss daher auch als irrig betrachtet werden, wenn man neuerdings den Versuch machte, einen Polygonzug nur nach den Streckenfehlern zu korrigiren, die Azimuthe aber vollständig ungeändert zu lassen, d. h. gerade so, wie sie die blosse Winkelbedingung geliefert hatte, indem man zuvor in längst bekannter und vielfach angewandter Weise die Winkeldifferenz umgekehrt proportional den Streckenlängen vertheilte.

Ich bin nun freilich weit entfernt, meine Fehlervertheilung im Polygonnetz als etwas Anderes wie eine blosse Annäherung zu betrachten, die je nach den Umständen eine grössere oder mindere Berechtigung für sich hat. Dennoch scheint sie mir, unter der Voraussetzung einer nicht gar zu grossen Verschiedenheit in den Bodenverhältnissen für die einzelnen Strecken des betreffenden Linienzugs und bei der gleichzeitigen Annahme geringstmöglicher eigentlicher oder zufälliger Beobachtungsfehler, der Wahrheit am nächsten zu kommen; zugleich hat sie den nicht zu unterschätzenden Vorzug, keiner besonderen Rechnungen zu bedürfen und nur mit schon vorhandenen Zahlenwerthen zu operiren.

V.

Vergleichende Resultate verschiedener Ausgleichungsmethoden.

Das erste behandelte Beispiel bezieht sich auf eine pothenot'sche Bestimmung aus 5 Zielpunkten, welche F. R. Helmert in seiner „Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate etc., Leipzig 1872“, S. 158—163 mittheilt.

Helmert hat (nach der strengen Ausgleichung) gefunden:

$$x = -1992,560^m \pm 0,0030; y = -1144,5210 \pm 0,0020$$

Ich finde nach meiner angenäherten Methode:

$$x = -1992,557; \quad y = -1144,519$$

also die Unterschiede

$$+ 0,003^m \quad \text{und} \quad + 0,002^m$$

woraus sich die mittlere Abweichung des genäherten Punktes von dem nach der strengen Methode gefundenen Ort ergibt zu

$$0,0035,$$

während der Helmert'sche mittlere Fehler ebenso ist.

Die vorläufige scharfe Rechnung aus 3 Punkten hatte mir den Ort mit einer Abweichung 0,0050 vom Helmert'schen Resultat ergeben.

Nicht ohne Interesse ist dabei die Vergleichung der Azimuthe. Der mittlere Fehler einer Richtungsangabe ist nach der Ausgleichung $\pm 0,23''$. Vergleiche ich meine definitiven Azimuthe mit denen welche die strenge Ausgleichung geliefert hat, so ergibt sich eine mittlere Abweichung für alle Azimuthe von $\pm 0,19''$.

Die vorstehenden Resultate sind annehmbar zu nennen, indess darf dabei nicht ausser Acht gelassen werden, wie die scharfe Winkelmessung (wenn das Beispiel kein fingirtes war), von vornherein eine nur geringe Abweichung wahrscheinlich machte. Eine weitere Prüfung wird das folgende Beispiel ergeben, in welchem einmal die Situation für die vorläufige Rechnung eine höchst ungünstige war, zugleich aber auch der Winkelmessung nur geringe Genauigkeit zukömmt. Es ist dies eine pothenot'sche Bestimmung, welche G. Hagen in seinem Werke: „Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, Berlin 1867, pag. 126—128 mittheilt. Die dort zur vorläufigen Berechnung benutzten Punkte Pillauer Leuchtthurm, Thurm Brandenburg und Schloss Balga lagen so ungünstig situirt, dass der erstere durch Thurm Braunschweig ersetzt werden musste. Hagen hat nun gefunden, (unter Zuhilfenahme der mittleren Fehler):

$$x = -192,22^R \pm 0,38; y = -124,69^R \pm 0,23$$

während ich erhalte

$$x = -191,85 - 0,25 = -192,10 \quad \text{und} \quad y = -125,12 + 0,41 = -124,71,$$

also die Abweichungen

$$- 0,12 \text{ und } + 0,02 \text{ Ruthen.}$$

Die Differenz zwischen den aus der strengen und der angenäherten Methode gefundenen Orten beträgt 0,121 während sie nach dem vorläufig, wenn auch scharf gerechneten Orte 0,567 betrug, sich also durch die Ausgleichung wesentlich verbessert hat.

Ist nun auch die Abweichung von 0,121 noch eine bedeutende, so erklärt sich dies daraus, dass nach der Ausgleichung der mittlere Fehler des streng gerechneten Punktes den enormen Betrag von 0,444, also beinahe eine halbe Ruthe erreicht. Es konnte dies nach der Sachlage auch nicht anders erwartet werden, wenn man die starken Differenzen in den Entfernungen der gegebenen Punkte und die in Anbetracht dieses Umstandes um so mehr mangelhaft zu nennende Winkelmessung betrachtet. Denn aus dem nach der Ausgleichung resultirenden mittleren Fehler einer Richtung um $\pm 13''$ und den Entfernungen 230, 6200, 2800, 5200 und 7500 Ruthen konnte kein besseres Resultat erwartet werden und ein einsichtiger Geometer hätte unter diesen Umständen von vornherein auf die pothenot'sche Festlegung eines solchen Punktes verzichtet, sofern dieser anders Anspruch auf Genauigkeit machen sollte.

Einige weitere Beispiele liefert mir Gerling in: „Die Pothenot'sche Aufgabe in praktischer Beziehung“, Marburg 1840 und in seinen „Ausgleichungsrechnungen“ etc., Hamburg und Gotha, 1843. Es ist aber dabei zu berücksichtigen, wie ich die durch eine Ausgleichung auf der Station gewonnenen Werthe der gemessenen Winkel, nämlich:

$$\begin{array}{lll} PP' = 73^0 & 35' & 22,53'' \\ PP'' = 80 & 37 & 09,77 \\ PP''' = 178 & 32 & 55,26 \\ PP'''' = 181 & 48 & 59,54 \end{array}$$

als beobachtete Richtungsunterschiede betrachtete und so in die Rechnung einführte.

Ich erhalte jetzt für den gesuchten Punkt den wahrscheinlichsten Ort:

$$x = + 2836,528 \pm 0,349; y = + 444,628 \pm 0,121$$

während das Annäherungsverfahren gibt:

$$x = + 2836,457; y = + 444,634.$$

Die Verhältnisse der Abweichungen zu den mittleren Fehlern sind hiernach:

$$\frac{71}{349} = 0,20 \text{ und } \frac{6}{121} = 0,05, \\ \text{im Mittel } 0,12.$$

Nach einer Bemerkung Gerlings (a. a. O. S. 35) ist ein begangener Schreibfehler in den Coordinaten der gegebenen Punkte wahrscheinlich. Nach Berichtigung desselben und mit denselben beobachteten Richtungsunterschieden (dies Beispiel ist von Gerling in der „Ausgleichungs-“ S. 124 u. ff. in etwas anderer Behandlungsweise wiederholt), finde ich nun:

$$x = + 2836,454 \pm 0,078; y = + 444,385 \pm 0,027 \text{ (streng);}$$

$$x = + 2836,408 \quad ; y = + 444,389 \quad \text{(Annäherung).}$$

Fehler-Verhältnisse:

$$\frac{46}{78} = 0,59 \text{ u. } \frac{4}{27} = 0,15, \text{ im Mittel } 0,37.$$

Das auf S. 187—191 meiner „Dreiecksnetze etc.“ gerechnete Beispiel gibt unter der Annahme von Richtungsunterschieden

$$\begin{array}{lll} P'P'' = 40^0 & 11' & 06'' \\ P'P''' = 116 & 45 & 42 \\ P'P'''' = 148 & 28 & 42 \\ P'P''''' = 220 & 10 & 48, \end{array}$$

Folgendes:

$$x = + 2500,104^m \pm 0,079; y = - 4504,365^m \pm 0,058 \text{ (streng);}$$

$$x = + 2500,109 \quad ; y = - 4504,371 \quad \text{(Annäherung).}$$

Fehlerverhältnisse:

$$\frac{5}{79} = 0,06 \text{ u. } \frac{6}{58} = 0,10, \text{ im Mittel } 0,08.$$

Das Mittel aus sämtlichen Fehlerverhältnissen, (ein auf S. 59 behandeltes Beispiel noch zugezogen), gibt nun

$$0,33 = \frac{1}{3},$$

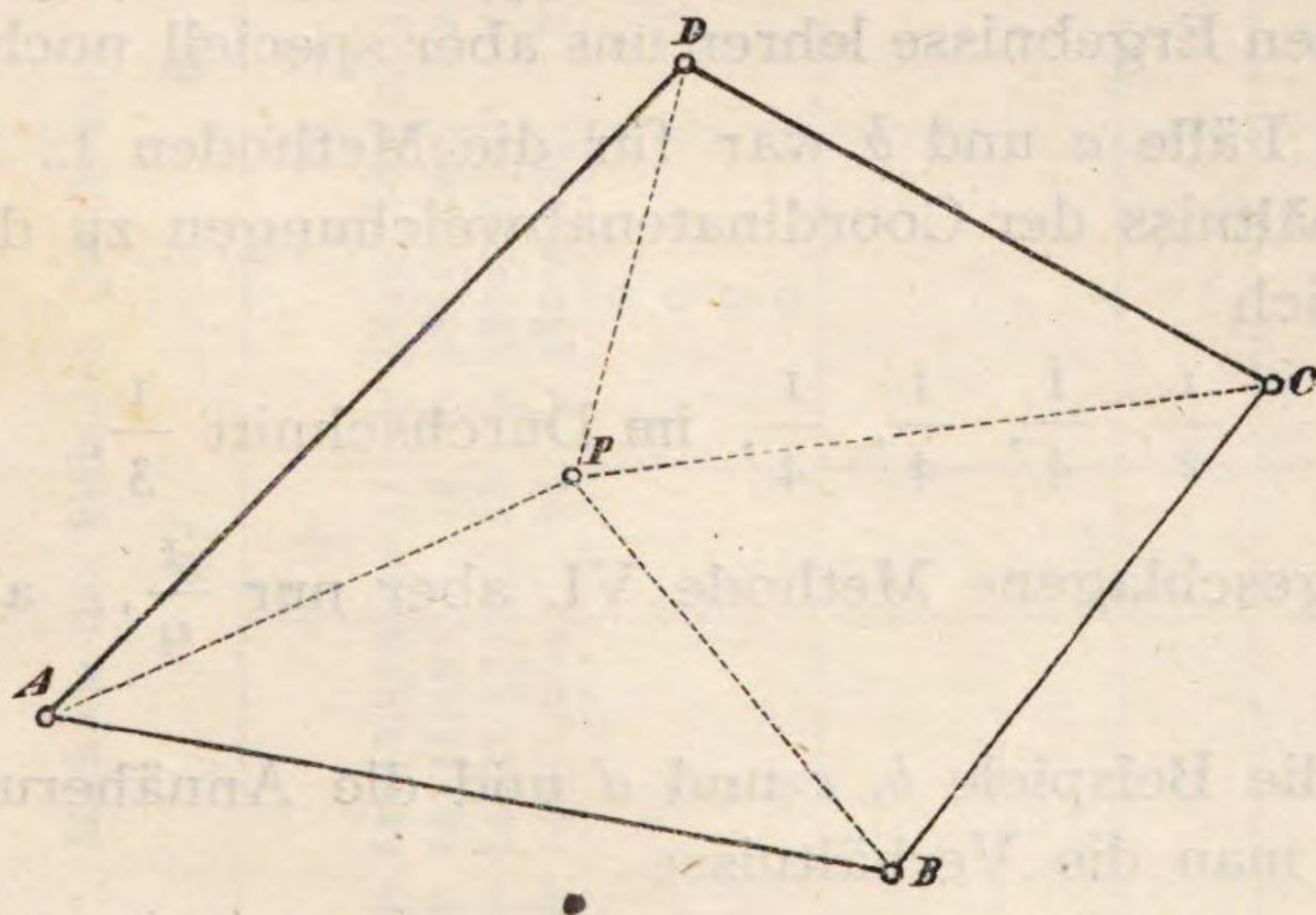
also eine Annäherung, die allerdings durch die bei den triangulären Bestimmungen gefundene weit übertroffen wird, indess in Anbetracht der hier obwaltenden Verhältnisse immerhin als befriedigend bezeichnet werden muss. Es ist dabei zu beachten, wie die Methode auf ganz anderen Ausgangspunkten fusst wie die M. d. kl. Q., da sie nicht bloß die Richtungsänderungen, sondern auch die des Ortes betrachtet. Auf alle Fälle lässt sich

behaupten, dass das vorgeschlagene Verfahren bei geschickter Anwendung geeignet ist, den gesuchten Punkt mit einer für die praktischen Bedürfnisse vollständig genügenden Sicherheit zu geben, indem die Abweichungen von dem streng gefundenen Ort sich im Allgemeinen noch weit innerhalb der zu erwartenden mittleren Fehler bewegen. Da nun zugleich die erheblich erleichterte Anwendung klar zu Tage liegt und so die Möglichkeit geboten ist, die gewonnene Zeit auf Herbeiziehung weiterer Beobachtungselemente zu verwenden, so dürfte die Methode bei Einschaltungsarbeiten für Dreieckspunkte III. und IV. Ordnung vielfach nützliche Anwendung finden können. —

Indem unten noch zwei weitere hierher gehörige Beispiele Platz finden werden, gehe ich jetzt zu einer Vergleichung der Triangulirungs-Ausgleichung über. Sie bezieht sich auf die von Professor Jordan im Monatsblatt des Badischen Geometer-Vereins, Jahrgang 1871, Nro. 2—5, für ein ähnliches Beispiel gegebenen Daten.

In dem nachstehenden Viereck sind demzufolge die bekannten Punkte A, B, C, D durch folgende Coordinatenwerthe gegeben:

A.	B.	C.	D.
x = + 38403,25 .	+ 38596,72 .	+ 38323,95 .	+ 37982,92 .
y = + 14490,43	+ 13955,49 .	+ 13647,94 .	+ 13939,21 .



Der Punkt P ist zu bestimmen und zwar in folgender Weise:

- Der Punkt wird aus den zwei ersten Dreiecken mit den gemessenen Winkeln A, B, sowie B, C berechnet.
- Bestimmung von P wieder aus denselben Dreiecken, aber sämtliche Winkel beobachtet.

c) Sämmtliche Dreiecke analog wie a), nur die den Grundlinien anliegenden, und

d) desgleichen, aber sämmtliche Winkel gemessen.

Die beobachteten Winkel sind folgende:

I. Dr.	II. Dr.	III. Dr.	IV. Dr.
42° 55' 08",8	75° 23' 39",3	40° 52' 37",6	16° 58' 44",2
93 56 40,9	54 24 39,1	62 54 34,3	148 44 08,2
43 08 33,0	50 10 49,1	76 11 50,4	14 17 52,9
180 00 22,7	179 59 07,5	179 59 02,3	180 00 45,3

Hinsichtlich der in der folgenden Aufstellung gegebenen Werthe habe ich blos zu bemerken, dass die der strengen Methode, des arithmetischen Mittels und des graphischen Verfahrens von Herrn Professor Jordan, die übrigen von mir herrühren. Die mittleren Fehler m_y und m_x der Coordinaten sind ebenfalls schon gegeben.

Die vorläufigen Winkelverbesserungen sind behufs der thunlichsten Uebereinstimmung mit den übrigen Annäherungsmethoden nach Gl. (7) vorgenommen.

Betrachten wir jetzt die folgende Tabelle.

Die Unzulänglichkeit der Methoden II. und IV. ist schon früher bewiesen worden, ebenso dass besonders die I. und V. Verfahrensweise nicht immer den Anforderungen entsprechen. Die nachstehenden Ergebnisse lehren uns aber speciell noch Folgendes:

Für die Fälle a und b war für die Methoden I., II., IV. und V. das Verhältniss der Coordinatenabweichungen zu den mittleren Fehlern gleich

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \text{ im Durchschnitt } \frac{1}{3},$$

für die vorgeschlagene Methode VI. aber nur $\frac{1}{9}$, also 3 mal schärfer.

Für die Beispiele b , c und d und die Annäherungen I., III. und V. hat man die Verhältnisse

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \text{ im Durchschnitt } \frac{1}{3},$$

wogegen Methode VI. wieder nur $\frac{1}{8}$, also über 2malgenauer, gibt.

Für alle vier Fälle endlich und für die Methoden I. und V. ist gefunden

a. Ord. u. Absc.	Methode der kleinsten Quadrate.				Arithm. Mittel.	Uebereinst. Dreiecksberechnung.	Graphische Methode.	Methode v. Kerschbaum.		Bayerische Methode.	Neue Methode.	
	m_y		m_x									
a.	+ 14131,579	+ 38250,682	+ 0,031	+ 702	.562	.568	.687	.589	.693	.569	.571	.686
b.	+ 14131,592	+ 38250,695	20	.689	.604	.581	.693	.581	.693	.581	.592	.694
c.	+ 14131,574	+ 38250,675	17	.685	.569			.578		.568	.575	.675
d.	+ 14131,604	+ 38250,684	13	.680	.604			.608		.603	.605	.677
a.	0	0		20	17	11	5		11	10	8	4
b.	0	0		6	12	11	2	3	2	11	0	1
c.	0	0		10	5			4		6	1	0
d.	0	0		4	0			4		1	1	7
a.	$\frac{\Delta y}{m_y}$ und $\frac{\Delta x}{m_x}$			0,55	0,65	0,36	0,16		0,36	0,32	0,26	0,13
b.	"			0,50	0,30	0,46	0,10	0,12	0,10	0,46	0,00	0,05
c.	"			0,28	0,59			0,22	0,18	0,33	0,06	0,00
d.	"			0,00	0,31			0,29	0,62	0,07	0,07	0,54
s				0,33	0,46	0,41	0,13	0,21	0,23	0,30	0,10	0,18
n				0,50		.0,27		0,26	0,23	0,26	0,11	
Mittel von	a und b			0,33						0,37	0,12	
	b, c und d			0,40						0,34	0,14	
	a, b, c u. d											

$$\frac{1}{3}, \text{ und für die neue Methode } \frac{1}{7}.$$

Ziehen wir einen allgemeinen Durchschnitt, so geben alle fünf Näherungsverfahren das Verhältniss $0,32 = \frac{1}{3}$, während wir nach der VI. Methode $0,13 = \frac{1}{8}$ erhalten.

Die vorstehenden Resultate, allerdings nur aus Zahlenbeispielen gezogen und deshalb einer allgemeinen Beweiskraft für alle Fälle entbehrend, dürften doch wol geeignet sein der vorgeschlagenen Methode einige Beachtung zu sichern, da die grössere Annäherung an die strengen Werthe sich in allen Fällen ohne Ausnahme dokumentirt.

Bleibe ich bei den eben angeführten Beispielen stehen, so kann selbst die in der Vorrede erwähnte rein theoretische Methode (bis auf die Trennung der x und y) keine besseren Resultate aufweisen, obwol dies bei der Gleichartigkeit ihrer Grundlagen mit denen des strengen Verfahrens zu erwarten gewesen wäre. Es geben nämlich nach ihr die einzelnen Fälle die Coordinatenwerthe (in den letzten Stellen):

y	x
·571	·683
·592	694
·575	·676
·606	·677,

also die Differenzen:

$$8 \text{ u. } 1, 0 \text{ u. } 1, 1 \text{ u. } 1, 2 \text{ u. } 7$$

oder die Verhältnisse

$$0,22 \text{ u. } 0,03, 0,00 \text{ u. } 0,05, 0,06 \text{ u. } 0,06, 0,14 \text{ u. } 0,54.$$

Daraus folgert der Reihe nach für die Fälle a und b, sowie b, c, d, und a, b, c, d:

$$0,075 = \frac{1}{13}, 0,14 = \frac{1}{7}, 0,14 = \frac{1}{7}$$

oder im allgemeinen Durchschnitt

$$\frac{1}{8},$$

gerade wie die einfachere Methode. In Hinsicht darauf möchte die letztere immerhin, ganz abgesehen von den früher entwickelten Gründen, vorzuziehen sein. —

Bei Gelegenheit der Berechnung der obigen Beispiele hat Herr Professor Jordan auch die Pothenot'sche Aufgabe in den Kreis der Betrachtungen gezogen und mit den auf P gegebenen Winkeln diesen Punkt einmal nach der strengen Ausgleichung, dass

andere Mal durch zweimalige Rechnung aus je 3 Punkten bestimmt. Ich habe dieselbe Rechnung mit fast genau gleichen Winkeln, aber unter der Voraussetzung von Richtungsbeobachtungen wiederholt. Es sind also auf P beobachtet die Richtungen

$$\begin{array}{rcl} D & = & 0^0 \quad 0' \quad 0'' \\ C & = & 62 \quad 54 \quad 34,3 \\ B & = & 117 \quad 19 \quad 14,2 \\ A & = & 211 \quad 15 \quad 55,1. \end{array}$$

Die strenge Ausgleichung gibt die Coordinatenwerthe:

$$y = + 14131,635 \pm 0,005; \quad x = + 38250,701 \pm 0,005.$$

Die im Text erörterte einfache Methode liefert in einem Drittel der Zeit dieselben Werthe zu

$$y = + 14131,635 \text{ und } x = + 38250,703,$$

also das Verhältniss der Abweichungen zu den mittleren Fehlern gleich

$$0 \text{ und } \frac{2}{5}, \text{ im Mittel zu } \frac{1}{5}.$$

Die gesonderte Rechnung aus zwei Kombinationen hatte bei Professor Jordan diese Verhältnisse zu $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{3}$, im Mittel also $\frac{2}{3}$

gegeben.

Ich bin nun weit entfernt, den eben angeführten Beispielen vollste Beweiskraft zuzuerkennen; dies würde erst bei einer ausserordentlich grossen Anzahl solcher Fälle möglich sein. Immerhin glaube ich jedoch die Behauptung aufstellen zu können, dass die Anwendung der von mir vorgeschlagenen Methoden die faktischen Abweichungen von dem wahrscheinlichsten Ort durchgehends in so kleinen Beträgen geben wird, dass dieselben praktisch verschwindend zu nennen sind. Der Zeitaufwand ist dabei, unter Voraussetzung der Benützung der mehrgenannten graphischen Hilfstafeln für die quadratischen Koeffizienten S und C ein so geringer, dass keine andere ähnliche Methode mit dem in Rede stehenden Ausgleichungsverfahren konkurriren kann. Dieser letztere Punkt ist noch von besonderem Interesse hinsichtlich der am Schlusse des III. Art. kurz behandelten wichtigen Aufgabe, die Ausgangspunkte einer Lokal-Triangulation oder Einschaltung gleichzeitig unter sich und mit dem System der Landes-Triangulation in Verbindung zu bringen. Eine strenge Ausgleichung ist hier, wie von vornherein zu sehen, ausgeschlossen, und eine Lösung auf dem Wege des Versuchs wird einestheils zeitraubend, andern-

theils so von der individuellen Begabung abhängig, dass sie wol nicht jedem Techniker zugemuthet werden könnte.

Die Wichtigkeit der Aufgabe, besonders bei Einschaltungen in Dreiecksnetze deren Punkten eine verhältnissmässig grosse relative Unsicherheit zukömmt, liess ein einheitliches und nach festen Normen gebildetes Verfahren höchst wünschenswerth erscheinen. Ich habe nun die im III. Art. vorgeschlagene Methode auf das oben gegebene Viereck, dessen Punkten aber jetzt variirende Coordinaten beigelegt wurden, angewandt. Die Elemente, bei denen die Coordinaten jedes Punktes als Resultat einer einfachen Ausgleichung nach einer hinreichenden Anzahl Punkten der Landes-Triangulation angesehen werden, sind jetzt folgende:

Gegebene Coordinaten:

	y:	x:
1	= + 14490,40;	+ 38403,25;
2	= + 13955,49;	+ 38596,72;
3	= + 13647,94;	+ 38323,98;
4	= + 13939,25;	+ 37982,90.

Beobachtete Richtungen:

Auf Punkt 1:	Auf Punkt 2:
4 = 0 0 0 ;	1 = 0 0 0 ;
3 = 31 56 59,9;	4 = 71 38 10,2;
2 = 57 12 38,0.	3 = 118 32 47,0.
Auf Punkt 3:	Auf Punkt 4:
2 = 0 0 0 ;	3 = 0 0 0
1 = 36 11 34,9;	2 = 42 01 11,5
4 = 91 04 11,7.	1 = 93 10 23,3

Die Vergleichung derselben mit den aus den Coordinaten gerechneten Richtungen gibt nachstehende Verbesserungen:

0,0	0,0	0,0	0,0
— 24,9	+ 18,1	+ 4,7	+ 15,6
— 20,8;	— 7,8;	+ 10,3;	+ 18,3,

woraus die Verbesserungen der einzelnen Richtungen folgen:

+ 15,4	— 4,8	— 4,9	— 13,0
— 9,5	+ 13,4	— 0,2	+ 2,6
— 5,4;	— 12,6;	+ 5,1;	+ 5,3.

Das Auftragen der dem Diagramm entnommenen linearen Ortsverschiebungen und die nachfolgende Ausgleichung liefern in Zeit von einer Stunde die Coordinaten-Verbesserungen:

$$y_1 = + 0,009 \quad x_1 = + 0,003$$

$$\begin{array}{ll}
 y_2 = + 0,004 & x_2 = 0,000 \\
 y_3 = + 0,001 & x_3 = - 0,007 \\
 y_4 = - 0,006. & x_4 = + 0,009.
 \end{array}$$

Die mittlere Abweichung einer Richtung von den gegebenen Beobachtungen, welche vor der Ausgleichung $\pm 9'',0$ war, ist jetzt auf $6'',7$ herabgebracht und alle Winkel-Differenzen sind ohne eine einzige Ausnahme kleiner geworden; zugleich haben sich sämtliche Seitenverhältnisse in solchem Sinne geändert, dass sie in- zwischen der beiden aus der Landes-Triangulation und aus den Beobachtungen resultirenden Vierecken, indess näher dem ersten, liegen. Dies letztere war einmal nach der angewandten Methode zu erwarten, musste aber andererseits auch so verlangt werden, da doch gleichzeitig die Forderung besteht, die gegebenen Punkte als Resultat der Ausgleichung einer grösseren Anzahl beobachteter Richtungen, so wenig als möglich zu ändern. Dies wurde auch erreicht, denn die Coordinaten-Korrekturen sind so klein, dass die vorher festgestellte Lage der Punkte gegen die bezüglichen Ob- jekte der Landes-Triangulation in keinem beunruhigenden Masse gestört wird.

Ist somit das Resultat ein allseitig befriedigendes, so ist noch die Leichtigkeit zu erwähnen, mit welcher die in Rede stehende Methode sich auf jeden beliebigen Fall, mögen in dem Polygon viele oder wenige Diagonalen eingeschnitten sein, anwenden lässt; ferner die Raschheit, mit der das Resultat sich ohne viele Rech- nung und doch gleichzeitig sämtliche Beobachtungen in eins zusammenfassend, gibt. Dabei ist noch zu bemerken, wie alle Rech- nungen sich durch geeignete Vorkehrungen mit leichter Mühe kon- troliren lassen und so die Wahrscheinlichkeit von zu begehenden Rechnungsfehlern in möglichst enge Grenzen eingeschlossen wird. Ist es auch selbstverständlich, dass man für umfassendere Arbeiten zu der strengen Ausgleichung eines solchen Ausgangspolygons wird greifen müssen, so ist doch wieder nicht zu verkennen, wie das vorgeschlagene Verfahren geeignet ist, in vielen Fällen von trigo- nometrischen Lokal-Einschaltungen eine zuverlässige Grundlage zu schaffen. Dies um so mehr, als ich ein besonderes Gewicht auf die früher entwickelten und von den gewöhnlichen theoretischen An- nahmen abweichenden Genauigkeitsverhältnisse der von uns beo- bachteten Richtungen lege und die Beachtung der diesbezüglichen Sätze für ein Moment von höchster Wichtigkeit halte.

Zusatz.

Die vorstehend aufgeführten Vergleichen berechtigen uns auf alle Fälle, die zur Anwendung gebrachte Ausgleichungsform bei Punktbestimmungen im Netz-Anschluss als für die Bedürfnisse der geodätischen Praxis vollständig ausreichend zu erklären. Indess lässt sich nicht verkennen, dass die strengere Beachtung der theoretischen Sätze, ohne dabei das zu Grunde gelegte Princip aufgeben zu müssen, doch einige specielle Modifikationen des vorgeschlagenen Weges erheischen würde. Es hängt nun ganz von den Umständen ab, welchem der beiden Wege, den einfacheren oder den, sogleich kurz zu entwickelnden, strengeren man gehen will. In den meisten Fällen dürfte der erstere, meiner Ansicht nach, weitaus genügen.

Im III. Artikel ist als einfachster Ausdruck für den mittleren Fehler einer von uns beobachteten Richtung der Werth

$$\pm \frac{m}{\sqrt{r}}$$

aufgestellt worden. Dem entsprechend lässt sich der mittlere Winkelfehler durch

$$\pm \frac{m}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}$$

darstellen, wo n die Beobachtungszahl, (für unseren Fall fast immer gleich $= 1$ zu setzen), bedeutet.

Führen wir den reciproken quadratischen Werth dieses Ausdrucks in die Form

$$d\varphi_x^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{r_1^2}, \text{ resp. } d\varphi_y^2 = \frac{\cos^2 \varphi}{r_1^2}$$

als Gewicht ein, so folgt, dass wir bei gleichen Einstellungszahlen die Summe der Ausdrücke

$$d\varphi^2 = \frac{r_2 \sin^2 \varphi}{r_1 (r_1 + r_2)}, \text{ resp. } \frac{r_2 \cos^2 \varphi}{r_1 (r_1 + r_2)}$$

zu einem Minimum zu machen haben.

Man sieht leicht, in welcher Weise sich dieser Weg von dem früher eingeschlagenen unterscheidet und in welchem Masse er strenger ist. Zugleich tritt aber mit Deutlichkeit auch das Umständlichere seiner Anwendung hervor und wenn es auch keines-

wegs schwierig erscheint, die dergestalt resultirenden Gewichtszahlen in ähnlicher Weise wie früher geschehen in Tafeln zu bringen, auf alle Fälle würde dies nicht in so kompendiöser und die praktische Anwendung so ausserordentlich erleichternden Weise haben geschehen können. Dies hindert nicht, dass man in wichtigeren Fällen, in denen zugleich den theoretischen Annahmen thunlichst Genüge geleistet ist, sich wirklich dieser Gewichtsform bediene; ob aber mit einem wesentlichen Gewinn an Genauigkeit, dürfte die Frage sein. Jedenfalls wird die im III. Art. gegebene Entwicklung, sowol in Anbetracht der Leichtigkeit ihrer Anwendung wie der für die Zwecke und Ziele der trigonometrischen Einschaltung noch vollständig ausreichenden Genauigkeit im Allgemeinen immer den Vorzug verdienen müssen und Sache des ausführenden Trigonometers wird es sein, gegebenen Falls sich für die einfachere oder strengere Form zu entscheiden, je nach dem allgemeinen Grade der Genauigkeit und der Berücksichtigung theoretischer Forderungen überhaupt, welche den bezüglichen trigonometrischen Messungen zuerkannt werden soll.

Anhang.

Ueber das Princip des kleinsten absoluten Zwanges.

Es sei in einer Ebene ein beliebiges Punktsystem gegeben und es liege die Aufgabe vor, diese sämtlichen Punkte derart in einem einzigen Ort zu vereinigen, dass dabei die einzelnen Punkte bei der nothwendig werdenden Ortsveränderung den geringsten absoluten Zwang erleiden.

Diese Forderung ist bis jetzt eine unbestimmte oder willkürliche. Sie würde erst dann diesen Charakter verlieren, wenn es gelänge, dem Ausdrucke, „absoluter Zwang“, eine logisch begründete und der Natur der Sachlage entsprechende Bedeutung unterzulegen.

Dazu führen die nachfolgenden Betrachtungen.

Soll ein gegebener Punkt eine gewisse Ortsverschiebung erleiden, von der wir nur wissen, dass sie zwischen 0 und r , diese letztere Grösse absolut genommen, liegen wird, über die Richtung der Ortsveränderung aber gar nichts festgesetzt oder bekannt sein, so sind die sämtlichen Lagen, welche der Punkt nach und nach bei einem stetigen Wachsen des Radius von 0— r annehmen kann, durch eine Kreisfläche $r^2 \pi$ repräsentirt. Je grösser diese letztere, einem desto grösseren Zwang, kann man sagen, wird der Punkt unterworfen, insofern man sich zur Hervorbringung dieser Bewegung eine gewisse Kraft in Thätigkeit gesetzt denken kann, welche natürlich der Kreisfläche $r^2 \pi$ und nicht dem Radius r proportional sein muss, was schon mit Nothwendigkeit daraus folgt, dass wegen der Unbestimmtheit der Bewegungsrichtung sämtliche überhaupt mögliche Richtungen continuirlich durchlaufen werden müssen.¹⁾

Die eben beigezogene mechanische Vorstellung führt von selbst

¹⁾

$$\int_0^r 2x\pi \cdot dx = r^2 \pi.$$

darauf, wie in Fällen, wo in einem dergestalt zu verschiebenden Ort mehrere, 2, 3, . . . , allgemein m Punkte vereinigt sind, das Mass des aufzuwendenden Zwanges ein 2, 3, . . . m -faches sein wird.

Es ist demnach der absolute Zwang eines um den Linearbetrag r zu verschiebenden Punktes, in welchem m Punkte vereinigt sind, gleich

$$m \cdot r^2 \pi$$

zu setzen.

Die Anwendung dieses Satzes auf die oben vorgelegte Aufgabe ist nun leicht; es ist bloss erforderlich, die Summe der den einzelnen Punkten nach der Vereinigung in einem mittleren Punkte zukommenden Kreisflächen, nach dem Obigen das Mass des Zwanges, zu einem Kleinsten zu machen, also, wenn man die stattfindenden absoluten Abweichungen mit $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ bezeichnet,

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k^2 \pi = \text{Minimum.}$$

Da π gemeinschaftlicher Faktor, so kann derselbe vorher durch Division entfernt werden und ebenso ist wol kaum nöthig zu bemerken, dass $m = 1$, wenn in sämtlichen der zu vereinigenden Orte nur je ein Punkt angenommen wird.

Das eben aufgestellte allgemeine Princip, welches zu interessanten Vergleichen mit bekannten mechanischen Naturgesetzen anregt, lässt noch eine speciellere Auffassung zu.

Wenn nämlich die Aufgabe gegeben ist, von einem bestimmten Punkte aus eine vertikal abwärts liegende Stelle des Bodens durch das Herabfallenlassen einer Kugel (Lothes) zu treffen, so wird das Zusammenwirken etwa vorauszusetzender Fehlerursachen dahin resultiren, für jedes Fallenlassen (jede Beobachtung) im Allgemeinen einen verschiedenen Punkt zu erhalten. Jeder dieser Punkte gibt im gewissen Sinne ein Zeugniß für den Ort ab, dem der gesuchte Punkt entsprechen soll. Dabei ist aber, sofern das Zeugniß als ein glaubwürdiges gelten soll, noch eine bestimmte Voraussetzung zu machen. Es darf nämlich keine Ursache vorhanden sein, welche das Loth nach einer gewissen Seite hin ablenken könnte. Das wäre der Fall wenn beispielsweise die Kugel nicht homogen ist und zugleich in stets genau derselben Weise, (eine bestimmte Stelle der Kugel stets in derselben Richtung liegend) herabfiele. In gleicher Weise könnte die herrschende Windrichtung die Ablenkung des Lothes bewirken und eine ähnliche konstante Abweichung bei gleichbleibender Fallhöhe die Rotation

der Erde hervorbringen. Soll demnach für die richtige Auffindung des gesuchten Punktes die grösste Wahrscheinlichkeit gegeben werden, so dürfen keine konstanten Fehlerursachen vorhanden sein.

Blos zufällige Fehlerursachen sind aber dabei immer denkbar. Es hängt die Genauigkeit von der Sicherheit ab mit der man das Loth gerade von dem gegebenen Punkte aus fallen lässt; ferner ob nicht die Operation des Herabfallenlassens der Kugel im letzten Moment eine gewisse Richtungsablenkung ertheile und ebenso, ob nicht wenigstens vorübergehende Luftbewegungen einen gewissen Einfluss üben können. Insofern aber die Beobachtungen unter denselben Umständen wiederholt werden, ist bezüglich der letztgenannten Fehlerursachen kein Grund vorhanden, gerade nach einer bestimmten Richtung hin Ablenkungen zu vermuthen, vielmehr ist anzunehmen, dass sich die Beobachtungsergebnisse konzentrisch um den gesuchten Punkt herum gruppieren, wenn nur die Beobachtungen zahlreich genug wiederholt werden.

Dabei ist es wahrscheinlich, dass die getroffenen Punkte sich in der Nähe des gesuchten Punktes am meisten häufen und in immer weiteren Entfernungen von denselben immer seltener werden. Ja eine genauere Untersuchung der die Beobachtung begleitenden Umstände könnte sogar eine gewisse Grenze r angeben, über welche hinaus eigentlich gar keine Abweichung mehr zu erwarten ist, sobald dieselbe als von blos zufälligen Fehlerursachen herrührend erkannt werden soll.

Wird ferner eine gewisse Stelle des Bodens wiederholt getroffen, so wächst die Wahrscheinlichkeit, dass der gesuchte Punkt in möglichster Nähe dieser Stelle liege, proportional der Wiederholung dieses Ereignisses.

Die Aufgabe nun, aus den einzelnen Beobachtungswerten das wahrscheinlichste Zentrum, den gesuchten Punkt, zu konstruieren, ist der früheren Aufgabe ganz analog. Jeder der getroffenen Punkte erhebt für sich den Anspruch der gesuchte zu sein, und sobald derselbe seinen Ort verlassen soll, um sich mit den übrigen an einem allen gemeinschaftlichen Punkte zu vereinigen, ist die Forderung berechtigt, ihm dabei den geringsten Zwang anzuthun. Dieser wird aber nach dem Früheren, da ja die Bewegung zwischen den Grenzen $0-r$ nach jeder beliebigen Richtung hin erfolgen kann, durch die Kreisfläche repräsentirt, welche mit der noch unbekannten linearen Ortsverschiebung v um ihn konzentrisch beschrieben wird. Man hat also auch hier wieder

$$\sum_{k=1}^n m_k v_k^2 \pi = \text{Minimum},$$

als einer Formel, aus welcher der plausibelste Ort für den gesuchten Punkt zu berechnen ist. In Worten ausgedrückt sagt die Gleichung nichts anderes, als dass der plausibelste Ort gefunden wird, wenn man die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der Abweichungen zu einem Minimum macht.

In ähnlicher Weise wie in unseren obigen Beispielen kann man die Sache auch rein analytisch anstatt geometrisch betrachten und zur Bestimmung einer beliebigen Grösse O eine Reihe von Beobachtungen o_1, o_2, o_3 etc., denen man aus anderweit herzuleitenden Gründen die Gewichte p_1, p_2, p_3 etc. beizulegen genöthigt ist, den gesuchten Werth aus

$$\sum_{p=1}^n p_n (O - o_n)^2 = \text{Minimum}$$

bestimmen, woraus in bekannter Weise

$$O = \frac{p_1 o_1 + p_2 o_2 + p_3 o_3 + \dots + p_n o_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} = \frac{[p o]}{[p]}$$

folgt.

Der an die Spitze gestellte Grundsatz hat uns also zum Princip des arithmetischen Mittels geführt. Wenn damit auch nichts Neues gegeben ist, so dürfte doch der Ableitung des Satzes eine grössere Anschaulichkeit zukommen als dieser Partie in den meisten Darstellungen sonst innewohnt. Insbesondere wird durch die Heranziehung der Kreisflächen als Mass des absoluten Zwanges in einfachster Weise der Nachweis geliefert, wie zunächst nur die zweite Potenz der Abweichungen und keine andere in Frage kommen kann.

Die obigen Entwicklungen bieten das Material, um unter Zuhilfenahme einiger Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung die weiteren Begriffe für „wahrscheinliche“ und „mittlere“ Fehler etc. abzuleiten. Es ist natürlich nicht meine Absicht, hier auf diese Ableitungen näher einzugehen, doch möchten noch einige Andeutungen über die Anwendbarkeit des aufgestellten Princips nicht unangemessen sein.

Wie schon früher hervorgehoben, kann ein auf dem obigen Wege gefundener Mittelwerth nur dann im gewissen Sinne als wahrscheinlichster bezeichnet werden, wenn konstante Abweichungen vermieden sind. Ist aber eine solche in dem Betrage k

vorhanden, so wird auch aus der Bedingungsgleichung des Minimums nicht 0, sondern

$$0 + k$$

resultiren, also der wahrscheinlichste Ort um den Betrag k verschoben sein. Sobald demnach bei Bestimmung einer Grösse konstante Fehlerursachen nicht absolut eliminirt sind, darfman das Resultat nicht mehr als wahrscheinlichstes bezeichnen. —

Dem aufgestellten Grundsatz zufolge wird bei der Vereinigung zweier Grössen, deren Bestimmung als gleich genau anzusehen ist, das einfache arithmetische Mittel den plausibelsten Werth geben, geometrisch betrachtet, der Mittelpunkt der Verbindungslinie der plausibelste Ort sein. Ist aber die eine aus n , die andere aus m Beobachtungen gefunden, so hat man vermöge der Bedingung, dass bei ihrer Vereinigung die Summe des absoluten Zwanges ein Kleinstes werde:

$$n \cdot r^2 \pi = m \cdot v^2 \pi$$

oder

$$\frac{r^2}{v^2} = \frac{m}{n}$$

d. h. die Quadrate der Abweichungen verhalten sich umgekehrt wie die Beobachtungszahlen.

Wenn also drei dieser Grössen gegeben sind, so lässt sich aus der eben aufgestellten Proportion immer die vierte Grösse berechnen. Es sei demnach $n = 1$, so hat man

$$\pm v = \pm \frac{r}{\sqrt{m}}$$

d. h. die plausibelste Abweichung nimmt ab wie die Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungen.

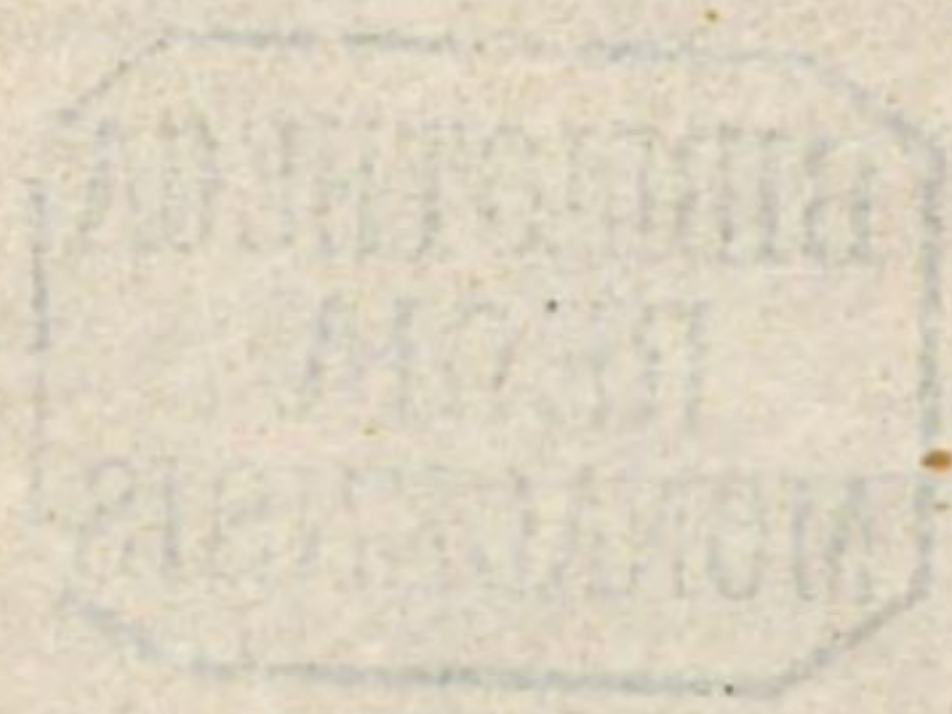
Dieser Satz lässt eine angemessene Anwendung in der allgemeinen Beobachtungstheorie zu.

Kennt man bei einer bestimmten Beobachtungsart eine gewisse Grenze, über welche hinaus ebenso viel Beobachtungswerthe fallen als innerhalb derselben bleiben, vorausgesetzt dass die Beobachtungen nur zahlreich genug wiederholt werden, so wird jene Grenze als der „wahrscheinlichste Fehler“ der einzelnen Beobachtung, der reciproke Werth derselben Grösse als das Mass der „Genauigkeit“ bezeichnet. Ist die fragliche Grenze r , für eine andere Beobachtungsart aber v , so kann man nach dem obigen Satze, der ersten Beobachtungsart die Genauigkeit 1 beilegend, eine

einzelne Beobachtung der zweiten Art als das Resultat von $\frac{r^2}{v^2}$ Beobachtungen der Genauigkeit 1 betrachten. Dieser Quotient ist nichts weiter als unser obiges m und mit dem Eingangs aufgeführten „Gewicht“ identisch. Die angemessene Bestimmung dieser Gewichte für die Vereinigung von Beobachtungsergebnissen verschiedener Genauigkeit ist aber für alle Probleme die auf die Anwendung des Princips des kleinsten absoluten Zwanges führen, von der grössten Bedeutung. Wenn beispielsweise in unserer Ausgleichung, nach welcher die aus den Beobachtungen hergestellten Direktionswinkel den geringsten absoluten Zwang erleiden sollen, die Genauigkeit oder das Gewicht der Richtungs- winkel als unabhängig von der Entfernung angenommen worden wäre, so würde das Resultat ein wesentlich verschiedenes gewesen sein und keineswegs den stattfindenden Verhältnissen entsprechen haben. Man muss also bei jeder Ausgleichungsoperation die den einzelnen Beobachtungsergebnissen zuzuerkennenden Genauigkeiten (oder Gewichte) schon einigermaßen a priori kennen wenn das Resultat der Ausgleichung den thatsächlichen Verhältnissen entsprechen soll. Und da diese Gewichtsbestimmung in den meisten Fällen einen mehr oder minder hypothetischen Charakter haben wird, so haftet derselbe bis zu einem gewissen Grade auch dem Ausgleichungsergebnisse an. Es ist demnach das Resultat einer jeden Ausgleichungsoperation immer nur als ein mehr oder minder plausibler Mittelwerth zu betrachten.



einzelne Beobachtung der zweiten Art als das Resultat von
Beobachtungen der Genauigkeit 1 betrachten. Dieser Quotient
ist nicht weiter als unser obiges m und mit dem Hinzusatz auf-
geführten Gewicht identisch. Die angemessene Bestimmung
dieser Gewichte für die Vertheilung von Beobachtungsergeb-
nissen verschiedener Genauigkeit ist aber für alle Probleme die auf
die Anwendung des Principes des kleinsten absoluten Zwanges
beruhen von der ersten Bedeutung. Wenn beispielsweise in un-
serer Ausgleichung nach welcher die aus den Beobachtungen
herausgestellten Gleichungen unter dem geringsten absoluten Zwang
erfüllt werden sollen die Genauigkeit oder das Gewicht der Richtungs-
winkel als unabhängig von der Entfernung angenommen worden
wäre, so würde das Resultat ein wesentlich verschiedenes gewesen
sein und keineswegs den statthabenden Verhältnissen entsprechen.
Man muss also bei jeder Ausgleichungsoperation
nicht die den einzelnen Beobachtungsergebnissen zuzu-
erkennenden Genauigkeiten (oder Gewichte) schon
vorigenmassen a priori kennen wenn das Resultat der
Ausgleichung den tatsächlichen Verhältnissen ent-
sprechen soll. Und da diese Gewichtsbestimmung in
den meisten Fällen einer mehr oder minder hypotheti-
schen Character haben wird, so heisst dasselbe bis
zu einem gewissen Grade auch dem Ausgleichungs-
resultate an. Es ist demnach das Resultat einer jeden
Ausgleichungsoperation immer nur als ein mehr oder
minder plausibler Mittelwerth zu betrachten.



INHALT.

	Seite
Einleitung	I
Artikel I. Rechtwinklig sphärische Coordinaten.	2
„ II. Die Einschaltung trigonometrischer Punkte in ein gegebenes Dreiecksnetz.	9
„ III. Ausgleichungs-Methoden für einzuschaltende Dreieckspunkte III. und IV. Ordnung.	17
„ IV. Die Coordinaten-Verbesserung im Polygonnetz.	44
„ V. Vergleichende Resultate verschiedener Ausgleichungsmethoden.	51
Anhang: Ueber das Princip des kleinsten absoluten Zwanges.	64

INHALT.

Seite	
1	Einleitung
2	Artikel I. Rechtswinklig sphärische Coordinaten.
9	II. Die Fänschaltung trigonometrischer Punkte in ein ge- gebenes Dreiecknetz.
17	III. Auszeichnungs-Methoden für einmündigende Dreiecks- punkte III. und IV. Ordnung.
44	Druck der Dr. Wild'schen Buchdruckerei (Gebr. Parcus).
51	V. Vergleichende Resultate verschiedener Auszeichnungs- methoden.
64	Anhang: Ueber das Princip des kleinsten absoluten Zwanges.

Im Verlage von Jul. Grubert in München ist ferner erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen;

DIE
DREIECKNETZE Vierter Ordnung
als
Grundlagen geodätischer Detail-Aufnahmen
zu
technischen oder staatswirthschaftlichen Zwecken.

Ein Handbuch
für
Geometer, Ingenieure & Ingenieur-Geographen
von
J. H. FRANKE.

Mit einem Vorwort von Dr. C. M. Bauernfeind.

Lexicon-Octav. 1871. Preis 4 Mark.

Theorie und Gebrauch
des
PRISMENKREUZES
von

Dr. C. M. Bauernfeind.

Mit einer Tafel Abbildungen.

Gr. 8. 1851. Preis 80 Pfennige.

Die
PLANIMETER
von

ERNST, WETLI & HANSEN,

welche

*den Flächen-Inhalt ebener Figuren durch das Umfahren des
Umfangs angeben.*

Von

Dr. C. M. Bauernfeind.

Mit einer Tafel Abbildungen.

Gr. 8. 1853. Preis 1 M. 50 Pf.

Dr. Wild'sche Buchdruckerei (Gebr. Pareus), München.



Franke, Julius H.

Die trigonometrische Punktbestimmung im Netzanschluss Mit besonderer Rücksicht auf eine rationelle Fehler-Ausgleichung

München 1875

Math.p. 700 g

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11318395-8